

УДК 532.22, 537.634

СТАТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

© 2011 г.

А.С. Виноградова, Т.И. Волкова

НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

vinogradova-as@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Решена задача о статической форме поверхности капли магнитной жидкости около линейного проводника с током, расположенного на оси осесимметричной поверхности переменного сечения. Показано, что гистерезис формы магнитной жидкости отсутствует. Также исследована форма поверхности намагничивающейся жидкости в поле горизонтального проводника с током с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения среды. Показано, что при фиксированном токе существуют несколько односвязных решений, удовлетворяющих условиям смачивания на стенках сосуда.

Ключевые слова: магнитная жидкость, свободная поверхность, магнитное поле, линейный проводник.

Постановка и решение задачи о капле магнитной жидкости на проводнике переменного сечения

Пусть тяжелая, несжимаемая, однородная, изотермическая магнитная жидкость (МЖ) объемом V окружает линейный проводник радиуса r_0 с током I . Проводник находится на оси осесимметричной поверхности, которая представляет собой две конические поверхности с углами раствора α_1 и α_2 (рис. 1). Вокруг МЖ находится немагнитная жидкость с той же плотностью. Поверхность МЖ есть поверхность вращения, т.е. $z = h(r)$, $r^2 = x^2 + y^2$ (ось z направлена по оси проводника), и магнитное поле проводника $H = 2I/(cr)$ не искажается на поверхности МЖ.

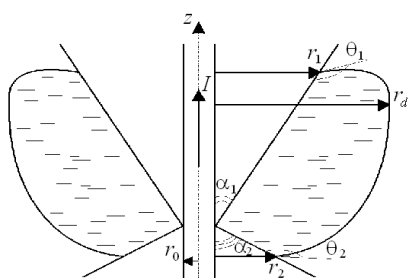


Рис. 1

Намагниченность МЖ M описывается формулой Ланжевена:

$$M(\xi) = M_S L(\xi), \quad L(\xi) = \text{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi},$$

$$\xi = \frac{mH}{kT}, \quad m = \frac{M_S}{n}. \quad (1)$$

Здесь T – температура, k – константа Больцмана, M_S – намагниченность насыщения МЖ, n – число ферромагнитных частиц в единице объема МЖ.

В случае несмачивания МЖ твердых стенок форма верхней поверхности контакта жидкостей $h_1(r)$ и форма нижней поверхности контакта жидкостей $h_2(r)$ в безразмерной форме имеют вид [1]:

$$h_i^*(r^*) = - \int_{r_i^*}^{r_d^*} \frac{G_i}{r^*(1-G_i^2)^{1/2}} dr^* + z_{\infty i},$$

$$G_i(r^*) = \frac{C_i}{r^*} + B_i r^* + (-1)^i \frac{P_1}{r^*} \int_{r_i^*}^{r^*} r^* P^* dr^*, \quad (2)$$

$$P^*(r^*) = \ln \left(\frac{\text{sh}(\xi_0 H^*)}{\xi_0 H^*} \right),$$

$$B_2(r_2^*, r_d^*) = -B_1(r_1^*, r_d^*), \quad z_{\infty 1} = z_{\infty 2}, \quad i = 1, 2,$$

где r_d – максимальный радиус капли, r_i – расстояние от проводника до точки касания поверхности $h_i(r)$ твердой стенки. Здесь введены безразмерные параметры: $r^* = r/r_0$, $h^* = h/r_0$, $H^* = H/H_0$, $H_0 = 2I/(cr_0)$, $\xi_0 = mH_0/kT$, $P_1 = nkTr_0/\sigma$, $R_c^* = R_c/r_0$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Далее звездочки опускаются. На линиях контакта трех сред выполняется условие Юнга, которое дает граничные условия: $G_i(r = r_i) = -\cos(\theta_i - \alpha_i)$, $i = 1, 2$, где θ_1, θ_2 – углы смачивания. Из граничных условий и уравнений $G_i(r_d) = (-1)^i$ определяются значения констант B_i и C_i .

Ранее в [1] было показано, что для капли МЖ на линейном проводнике для некоторых значений тока ξ_0 зависимость $V = V(r_d)$ имеет неоднознач-

ный немонотонный вид, некоторым значениям V соответствуют три значения r_d и возможен гистерезис формы МЖ. На рис. 2 приведена зависимость $V = V(r_d)$ для фиксированных значений тока ξ_0 при $\theta_1 = \theta_2 = 2\pi/3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/360$, $P_1 = 42.3$ ($r_0 = 0.065$ см, $T = 300$ К, $n = 1.89 \cdot 10^{17}$ см⁻³, $\sigma = 12$ дин/см). На рис. 2 кривая 1 соответствует $\xi_0 = 0.8$, кривая 2 – $\xi_0 = 1$, кривая 3 – $\xi_0 = 1.3$, кривая 4 – $\xi_0 = 1.5$, кривая 5 – $\xi_0 = 1.6$. При любых значениях ξ_0 эта зависимость имеет однозначный монотонный вид. Следовательно, для капель МЖ около проводника с током, расположенного на оси конических поверхностей с разными углами раствора, гистерезис формы МЖ при циклическом увеличении и уменьшении тока в проводнике отсутствует, в отличие от капель МЖ на линейном проводнике с током.

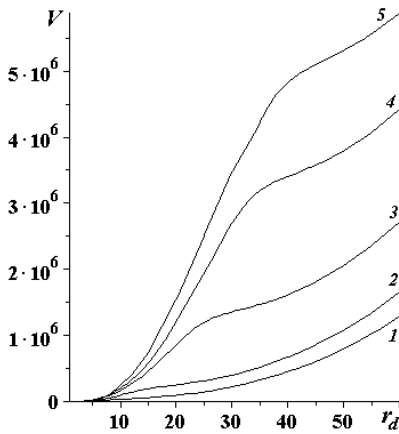


Рис. 2

Постановка и решение задачи о магнитной жидкости между горизонтальными плоскостями в поле проводника с током

Рассмотрена МЖ, находящаяся между горизонтальными плоскостями в магнитном поле проводника с током. В [2] была численно рассчитана форма поверхности МЖ без учета поверхностного натяжения среды в случае малых магнитных полей. МЖ расположена в цилиндрическом сосуде прямоугольного сечения, ось которого горизонтальна. Параметры магнитной и немагнитной сред обозначены индексами 1 и 2 соответственно, $\rho_2 > \rho_1$. Рассмотрен случай смачивания. Магнитное поле создается прямолинейным проводником, расположенным в точке $(0, \epsilon)$ параллельно поверхности жидкости в отсутствие тока (рис. 3). Намагниченность МЖ описывается формулой (1). Магнитное поле определяется формулой $H = 2I/(cr)$, $r = (x^2 + (z - \epsilon)^2)^{0.5}$, причем изменением поля в намагничивающейся жидкости пренебрегается.

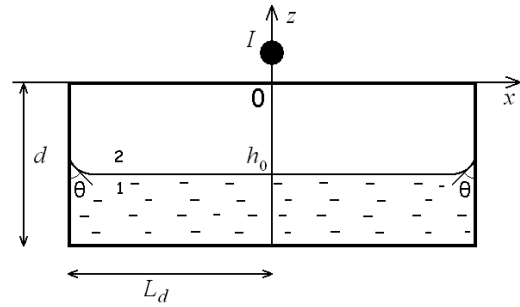


Рис. 3

Уравнение свободной поверхности $z = h(x)$ имеет вид

$$p_{01} - p_{02} - (\rho_1 - \rho_2)g(h - \epsilon) + nkT \ln \left(\frac{\text{sh}(mH/(kT))}{mH/(kT)} \right) = \pm 2\sigma K, \quad (3)$$

где σ – поверхностное натяжение, K – средняя кривизна поверхности. Знак $+$ ($-$) выбирается в случае, если МЖ выше (ниже) немагничивающейся среды. Вводя натуральную параметризацию кривой (угол θ отсчитывается по часовой стрелке) и безразмерные параметры $x^* = x/d$, $h^* = h/d$, $l^* = l/d$, $H_0 = 2I/(c\epsilon)$, $\sigma_0 = mH_0/(kT)$, $H^* = H/H_0$, из уравнения (3) получим систему дифференциальных уравнений:

$$C - Gg(h^* - \epsilon^*) + P \ln \left(\frac{\text{sh}(\xi_0 H^*)}{\xi_0 H^*} \right) = \frac{d\theta}{dl^*}, \quad (4)$$

$$\frac{dh^*}{dl^*} = -\sin \theta, \quad \frac{dx^*}{dl^*} = \cos \theta,$$

где $C = p_{01} - p_{02}$, $G = (\rho_1 - \rho_2)gd^2/\sigma$, $P = nkTd/\sigma$. Параметр C определяет форму поверхности МЖ, которая пересекает ось z^* в точке h_0^* .

На рис. 4 приведена зависимость безразмерного объема МЖ V^* от точки h_0^* при фиксированном токе $I = 10$ А и угле смачивания $\theta = 40^\circ$ ($G = 4.7$, $P = 267.4$, $T = 300$ К, $\sigma = 20.7$ дин/см).

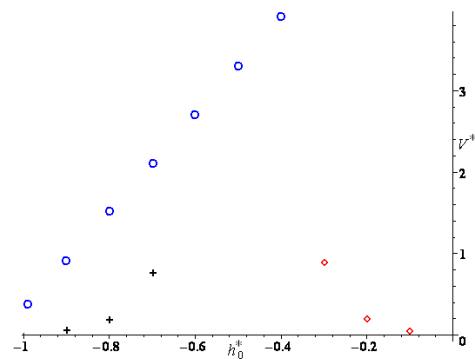


Рис. 4

Показано, что при $I = \text{const}$ существуют несколько односвязных решений, удовлетворяющих условиям смачивания на стенках: 1) капля на нижней плоскости (+); 2) слой магнитной жидкости

на дне сосуда (\circ); 3) капля под проводником (\diamond). При этом в каждом случае объем МЖ различен. Необходимое решение при заданном токе в проводнике выбирается из условия сохранения начального объема намагничивающейся среды и зависит от истории задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-90001).

Список литературы

1. Налетова В.А., Турков В.А., Виноградова А.С. // Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей: Сб. IX Междунар. науч. конф. 2009. С. 360–364.
2. Налетова В.А., Волкова Т.И., Рекс А.Г., Турков В.А. // Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей: Сб. IX Междунар. науч. конф. 2009. С. 355–359.

STATIC SHAPES OF THE SURFACE OF A MAGNETIC FLUID IN THE FIELD OF A LINE CONDUCTOR

A.S. Vinogradova, T.I. Volkova

The problem of the static shape of the surface of a magnetic fluid drop in the vicinity of a line conductor located on the axis of an axisymmetric surface with a variable cross section is solved. It is shown that the hysteresis of the shape of the magnetic fluid is absent. The surface shape of a magnetized fluid in the field of a horizontal conductor is also investigated, taking into account the gravity force and the surface tension of the medium. It is shown that, for a fixed value of the current, there exist several simply connected solutions satisfying the wetting conditions on the walls of the vessel.

Keywords: magnetic fluid, free surface, magnetic field, line conductor.