Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2069–2070

УДК 541.186

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ РОТАЦИОННОГО ТИПА В СРЕДЕ КОССЕРА

Ю.В. Виноградова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

yuvinog@gmail.com

Поступила в редакцию 24.08.2011

Показано, что в микрополярной среде может формироваться нелинейная стационарная упругая волна ротационного типа. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем волны в линейной среде. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды.

Ключевые слова: микрополярная среда, нелинейные волны, среда Коссера, амплитуда, стационарные волны.

В среде Коссера твердое тело характеризуется вектором перемещения центра масс u и вектором поворота φ. Кроме тензора деформации вводится тензор изгиба-кручения, кроме тензора напряжения – тензор моментного напряжения. Все тензоры несимметричные. Твердое тело характеризуется шестью степенями свободы и описывается шестью уравнениями движения [1]. Уравнение теплопроводности для микрополярной термоупругой среды идентично уравнению для симметричной термоупругости [2]. Была введена нелинейность по старшему аргументу в тензоры деформаций γ_{ji} и изгиба-кручения κ_{ji} [3].

Если в системе уравнений для термоупругой продольно-ротационной волны [3] термоупругих эффектов нет, то система разделится на два независимых нелинейных уравнения:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = u_{xx}(2\mu+\lambda)[1+2u_x], \\ J\varphi_{tt} = \varphi_{xx}(2\gamma+\beta)[1+2\varphi_x] - 4\alpha\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

Решение второго уравнения системы (1) ищем в виде бегущей стационарной волны, зависящей от переменной $\xi = x - vt$. Тогда уравнение в частных производных преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} + \frac{4\alpha\varphi_1}{J[v^2-c_1^2]}\left(1-\frac{2c_1^2}{v^2-c_1^2}\frac{d\varphi_1}{d\xi}\right)^{-1} = 0, \tag{2}$$

где $\sqrt{(2\gamma+\beta)/J} = c_1$. Пусть

$$\frac{2c_1^2}{v^2-c_1^2}\frac{d\varphi_1}{d\xi} < 1,$$

знаменатель разложим в ряд Тейлора $1/(1-x) = 1 + x$ и (2) преобразуется:

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} + m_1\varphi_1 + m_2\frac{d(\varphi_1)^2}{d\xi} = 0. \tag{3}$$

Здесь введены обозначения:

$$m_1 = \frac{4\alpha}{J[v^2-c_1^2]}, \quad m_2 = \frac{4\alpha c_1^2}{J(v^2-c_1^2)^2}.$$

Уравнение (3) не решается аналитически, так как в нем наблюдается нелинейность в производной. Это уравнение решим качественно. На фазовой плоскости $(\varphi_1, d\varphi_1/d\xi)$ в начале координат имеется особая точка равновесия типа «центр» и есть ограничение на фазовые траектории, дальше которого они разомкнуты. Прямая $d\varphi_1/d\xi = \varepsilon^*$ определяет границу, которая разделяет устойчивые движения (замкнутые фазовые траектории) и неустойчивые движения (незамкнутые фазовые траектории). Эта величина характеризует максимально возможный относительный угол поворота:

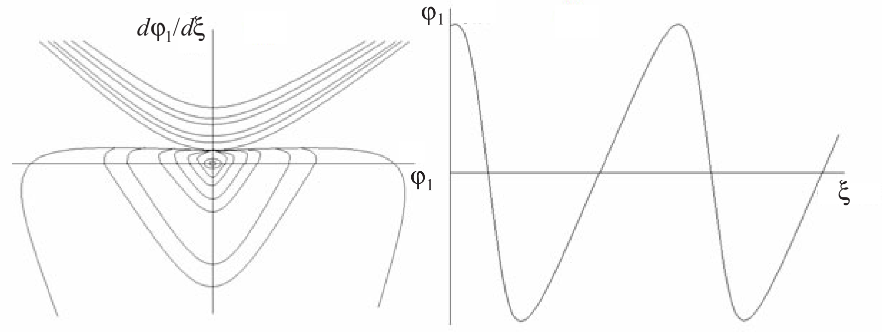
$$\varepsilon^* = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{4\alpha}{J[v^2-c_1^2]}\frac{J(v^2-c_1^2)^2}{8\alpha c_1^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c_1^2}-1\right).$$

На рис. 1*а* показан фазовый портрет уравнения (3) при $\alpha > 0$ (композиты), на рис. 1*б* – профиль стационарной волны при относительных углах поворота, близких к ε^*. Фазовый портрет позволяет оценить зависимость между амплитудой a и ее волновым числом k:

$$\frac{k}{k_0} = \left(\sqrt{1+\left(\frac{a/a_0}{\pi\varepsilon^*}\right)^2}\right)^{-1},$$

где k_0 и a_0 – волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны.

На рис. 2 показана зависимость между амплитудой нелинейной волны и ее волновым числом. С ростом амплитуды относительное значение волнового числа уменьшается, длина волны растет.



а) *б*)

Рис. 1

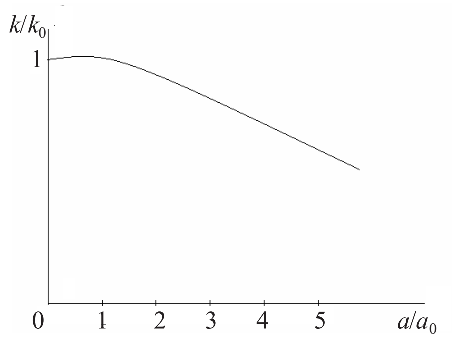


Рис. 2

На рис. 3 изображены профили нелинейной волны при фиксированной амплитуде и различных значениях максимально возможного относительного угла поворота. Чем больше значение максимально возможного относительного угла поворота, тем больше длина волны при фиксированном значении амплитуды.

Список литературы

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
3. Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И. Вывод уравнений динамики нелинейной среды Коссера // Вестник ННГУ. 2009. №6.

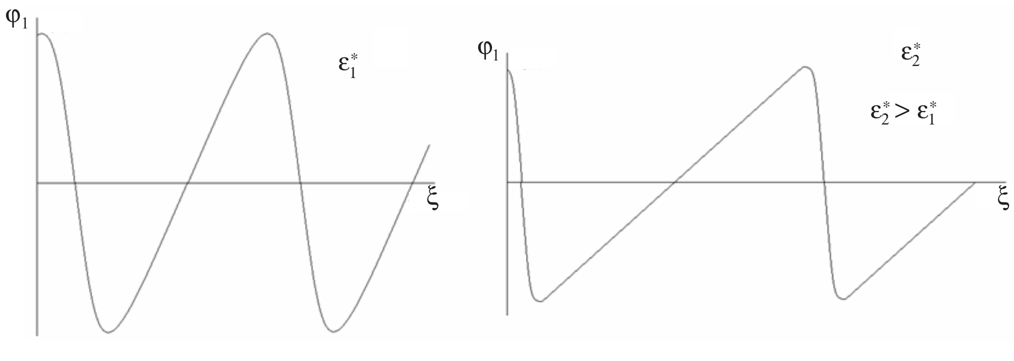


Рис. 3

DISTRIBUTION NONLINEAR STATIONARY WAVES ROTARY TYPE IN THE COSSERAT MEDIUM

Yu.V. Vinogradova

It was shown that in a micropolar medium can form a stationary nonlinear elastic wave rotary type. Such a wave is periodic and travels faster than waves in a linear medium. Wave has a sawtooth shape, the wavelength increases with its amplitude.

Keywords: micropolar medium, nonlinear wave, Cosserat medium, amplitude, stationary wave.