УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ СРЕД ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Ю.М. Волчков, Л.В. Баев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

volk@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматриваются два подхода к построению уравнений слоистой среды. В первом подходе используются кинематические гипотезы о распределении перемещений (трансверсальных и нормальных) по толщине анизотропных слоев, составляющих слоистую среду. Принятые гипотезы обеспечивают учет поперечных сдвигов и обжатие слоев. Во втором подходе используются модифицированные уравнения упругого слоя, построенные на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра. Порядок полученной системы дифференциальных уравнений упругого слоя в этом случае не зависит от того, задаются ли на лицевых поверхностях слоя напряжения, смещения или их линейная комбинация, что обеспечивает корректную формулировку условий на этих поверхностях как в перемещениях, так и в напряжениях. Это позволяет с использованием условий сопряжения перемещений и напряжений на контактных поверхностях построить систему дифференциальных уравнений слоистой среды.

Ключевые слова: слоистая среда, модифицированные уравнения упругого слоя.

Модель слоистой среды, состоящей из анизотропных слоев

Рассматривается слоистая среда, состоящая из s трансверсально изотропных слоев различной, но постоянной толщины h_k. Для учета поперечных сдвигов в каждом слое принимается для трансверсальных перемещений обобщенная кинематическая гипотеза Тимошенко

$$u_k^\alpha(x,y,z) = u_0^\alpha(x,y) + \sum_{m=1}^{k-1} v_m^\alpha(x,y) + \varphi_k(\zeta) v_k^\alpha(x,y),$$

для учета обжатия принимаются следующие аппроксимации для нормальных перемещений w:

$$w_k(x,y,z) = w_0(x,y) + \sum_{m=1}^{k-1} \omega_m(x,y) + f_k(\zeta)\omega_k(x,y),$$

где $u_k^\alpha(x,y,z)$ – трансверсальное перемещение в k-м слое в направлении координаты x^α; $u_0^\alpha(x,y)$ – трансверсальное перемещение при $z = 0$; $v_k^\alpha(x,y)$ – приращение трансверсального перемещения на k-м слое; $w_k(x, y, z)$ – поперечное перемещение точек k-м слое; $w_0(x, y)$ – поперечное перемещение при $z = 0$ (прогиб нижнего основания); $\omega_k(x, y)$ – приращение поперечного перемещения на k-м слое; $-1 \le \zeta \le 1$ – относительная поперечная координата в k-м слое; функции $\varphi_k(\zeta)$, $f_k(\zeta)$ удовлетворяют условиям $\varphi_k(0) = f_k(0) = 0$, $\varphi_k(1) = f_k(1) = 1$.

Уравнения равновесия и естественные краевые условия, соответствующие принятым аппроксимациям перемещений, получаются с использованием принципа возможных перемещений.

Исследуется влияние числа удерживаемых членов в аппроксимациях перемещений и вида функций $\varphi_k(\zeta), f_k(\zeta)$ на свойства результирующей системы дифференциальных уравнений и на результаты численного решения.

Рассматривается задача об оседании слоистой кровли над выработкой.

Модель слоистой среды, построенная с использованием модифицированных уравнений упругого слоя

При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) либо используются гипотезы кинематического и силового характера [1], либо применяются разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций [2]. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние и поэтому, как правило, с использованием таких гипотез уравнения теории оболочек строятся для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения. Решение контактных задач на основе таких уравнений зачастую приводит к эффектам нефизического характера. Применение разложений решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения оболочек и пластин в различных приближениях [1]. При этом одним из основных вопросов является следующий: на основе каких дополнительных предположений строится то или иное приближение, а именно, сколько членов в разложениях нужно удерживать при построении данного приближения? Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему функций интегрируемые с квадратом на отрезке [–1, 1], именно эта система функций обычно используется при построении уравнений теории оболочек. Предлагаются дифференциальные уравнения упругих слоистых оболочек и пластин в первом приближении, построенные на основе нескольких аппроксимаций каждой из искомых функций отрезками полиномов Лежандра [3]. При построении уравнений слоя вводятся понятия основных и дополнительных величин (эти величины являются коэффициентами при полиномах Лежандра в отрезках рядов, аппроксимирующих напряжения и деформации). В дифференциальные уравнения упругого слоя входят производные по пространственным переменным от основных величин. На торцевых поверхностях слоя для уравнений в первом приближении задаются векторы нормальных и поперечных сил, изгибающие и крутящие моменты или соответствующие им перемещения и углы поворотов.

Построенные уравнения обеспечивают корректную формулировку условий на лицевых поверхностях оболочки как в перемещениях, так и в напряжениях. Проведенное в [4] сравнение решений контактных задач на основе уравнений в первом приближении с решениями по уравнениям теории упругости показало хорошее соответствие результатов, полученных по приближенным уравнениям и уравнениям теории упругости.

Если среда состоит из нескольких упругих слоев, то для каждого слоя записываются дифференциальные уравнения упругого слоя. К полученной системе уравнений добавляются условия сопряжения для напряжений и перемещений на межслойных поверхностях. Это позволяет построить уравнения слоистой среды.

Дифференциальные уравнения упругого слоя в случае плоской задачи являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, матрица которой зависит от вида краевых условий на лицевых поверхностях слоя. Для любого вида условий на лицевых поверхностях можно записать общее решение этой системы. С увеличением числа слоев порядок системы дифференциальных уравнений возрастает и построение аналитического решения становится практически невозможным. В этом случае целесообразно использовать численные методы.

В задачах с сингулярными особенностями в напряженных состояниях (это имеет место, в частности, в задачах со смешанными краевыми условиями) применение конечных элементов, условия сопряжения которых формулируются в виде условий непрерывности усилий и моментов на их гранях, оказывается эффективнее, чем использование традиционных конечных элементов. Такие элементы не содержат сингулярных точек, поскольку они содержат только величины, осредненные по граням, и поэтому являются естественными регуляризаторами в задачах с особенностями в напряжениях. Уравнения упругого слоя позволяют построить конечные элементы, для которых условия сопряжения формулируются в виде условий непрерывности усилий и моментов на их гранях.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН № 74 (2009–2011).

Список литературы

1.Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. М.: Наука, 1966.

2. Солер А. // Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. E. Прикл. механика. 1969. Т. 36, №4. С. 107–112.

3. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48, №3. С. 179–190.

4. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. // Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т. 45, №2. С. 188–198.

SIMULATION OF THE STRESSED-STRAINED STATE OF LAYERED MEDIA WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Yu.M. Volchkov, L.V. Baev

Two approaches to constructing the equations of a layered medium are considered. The first approach uses cinematic hypotheses of the distribution of displacements (transverse and normal) over the thickness of anisotropic layers. The hypotheses make it possible to account for transverse shear and compression of the layers. In the second approach, modified equations of the elastic layer are used. These equations were constructed by approximating stresses and displacements with Legendre polynomials. The order of the system of differential equations of elastic layer in this case does not depend on whether the stresses on the front surface of the layer or displacements are specified. This allows constructing a system of differential equations of a layered medium using the displacement coupling conditions and stresses on the contact surfaces.

Keywords: layered medium, the modified equation of the elastic layer.