

УДК 62.50

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ УПРАВЛЕНИИ

© 2011 г.

В.С. Воронков

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

vic_voronkov@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Дана эллипсоидальная оценка области устойчивости систем стабилизации неустойчивых объектов при ограниченном управлении (типа насыщения), оптимальном по квадратичному критерию. Показано, что максимальные размеры этого эллипсоида достигаются, когда его главные оси совпадают с собственными векторами линейного объекта, а максимальный размер определяется допустимым отклонением по неустойчивой переменной.

Ключевые слова: неустойчивый объект, оптимальное ограниченное управление, область устойчивости.

Введение

Особенности задач управления неустойчивыми объектами рассматриваются в [1, 2]. Основной особенностью ограниченного управления неустойчивым объектом является ограниченность области притяжения (асимптотической устойчивости) стабилизируемого состояния в фазовом пространстве системы. Нахождение границ области устойчивости стабилизируемого состояния для нелинейных систем в общем случае является сложной задачей. В случаях когда получение аналитических выражений этих границ не представляется возможным, нахождение условий максимальной области устойчивости аналитическими методами также становится невозможным. Преодоление указанной трудности, предложенное в [3], состоит в нахождении оценки области устойчивости в виде эллипсоида и условий достижения его максимальных размеров. Выбор показателя качества управления неустойчивым объектом в виде максимума области устойчивости стабилизируемого состояния требует преодоление трудности выбора управления, при котором достигается этот максимум.

В отличие от используемых в [3] машинно-ориентированных методов функций Ляпунова и линейных матричных неравенств, предлагается использование квадратичного функционала и выбора соответствующих ему квадратичной формы и эллипсоида из условия совпадения его главных осей с собственными векторами матрицы объекта. На примере неустойчивого объекта, точные границы максимальной области устойчивос-

ти стабилизируемого состояния которого при ограниченном управлении известны, показывается, что ее эллипсоидальная оценка также достигает максимума при совпадении главных осей эллипсоида с собственными векторами матрицы объекта. Квадратичная форма, на основе которой строится эллипсоидальная оценка, находится из решения матричного уравнения Риккати. Тем самым решается задача выбора управления, при котором достигаются не только максимум эллипсоидальной оценки, но и минимизация квадратичного функционала при ограниченном управлении.

Постановка задачи и предлагаемый подход к ее решению

Рассматривается линейный неустойчивый объект

$$\dot{x}/dt = Ax + Bu \quad x \in R^n, \quad u \in R, \quad (1)$$

на единственный вход которого подается линейная обратная связь $\sigma(x)$ по состоянию, формирующая ограниченное типа насыщения управляющее воздействие $u = \text{sat}[\sigma(x)]$.

Ограничение по входу задается условием $|u| \leq 1$. Точные границы максимальной области устойчивости стабилизируемого состояния замкнутой системы, определяемые областью ее управляемости, являются гиперплоскостями, соответствующими уровням ограничений управления ± 1 . Эллипсоидальная оценка области устойчивости может быть получена выбором функции Ляпунова в виде квадратичной формы $V(x) = x^T Kx$, в которой K – определено-положительная матрица. Поверхность эллипсоида $E(K, \rho)$ в n -мерном

пространстве состояний задается матрицей K и константой $\rho = C$. Матрица K определяет ориентацию главных осей эллипсоида, а константа ρ – его размеры, согласно уравнению $V(x) = \rho$. Областью устойчивости стабилизируемого состояния равновесия будет эллипсоид такого размера ρ , при котором для $\forall x \in E(K, \rho)$ выполняется условие [3]:

$$\frac{dV}{dt} = x^T (A^T K + KA)x - 2x^T K B \text{sat}(B^T Kx) \leq 0. \quad (2)$$

Условие максимума эллипсоида находится из условий касания его сепаратрисной гиперплоскости и выборе матрицы K из решения алгебраического уравнения Риккати, матрицы которого стоят в правой части уравнения (2), если вместо функции насыщения использовать линейную обратную связь $\sigma = -2B^T Kx$. Как показано в [4], такая обратная связь соответствует минимуму квадратичного критерия от квадрата функции ограниченного управления. Ориентация главных осей эллипсоида $E(K, \rho)$ в этом случае совпадает с собственными векторами матрицы A , а его мак-

симальный размер $\rho_{\max} = 1/\lambda_1$ определяется допустимым отклонением по неустойчивой переменной (положительное собственное значение $\lambda_1 > 0$ матрицы A). Допустимые отклонения по устойчивым переменным в этом случае являются неограниченными.

Список литературы

1. Степаньянц Г.А., Тарарощенко Н.С. О структуре законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость систем управления неустойчивым объектом // ДАН СССР. 1970. Т. 193, №4. С. 774–776.
2. Воронков В.С. Синтез робастного нелинейного управления неустойчивыми объектами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. №6. С. 58–66.
3. Bin Zhon, Guang-Ren Duan. On analytical approximation of the maximal invariant ellipsoid for linear systems with bounded controls // IEEE Trans. on AC. 2009. V. 54, N2. P. 346–353.
4. Воронков В.С. Минимизация затрат ограниченного управления неустойчивым объектом // Приволжский научный журнал. 2008. №3. С. 58–65.

ELLIPSOIDAL ESTIMATION OF THE STABILITY REGION FOR A STABILISING SYSTEM OF AN UNSTABLE OBJECT WITH SATURATION CONTROL

V.S. Voronkov

Ellipsoidal estimation of the stability region for a stabilizing system of an unstable object with saturation control optimal under a minimum of the quadratic cost function is considered. It is shown that the maximal sizes of this ellipsoid are achieved if its principal axes coincide with the eigenvectors of linear objects. Then maximal sizes of this ellipsoid are given by means of admission derivations along an unstable variable.

Keywords: unstable object, saturation optimal control, stability region.