Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2098–2099

УДК 539.374

ПОСТАНОВКИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Д.В. Георгиевский

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 24.08.2011

Приводятся постановки новых линеаризованных задач устойчивости деформирования несжимаемых материалов с определяющими соотношениями, которые могут включать в себя тензорно нелинейные функции. Описываются случаи, когда эти задачи сводятся к спектральным проблемам устойчивости. Развиваются методы интегральных соотношений, позволяющие получать достаточные оценки устойчивости относительно того или иного класса возмущений.

Ключевые слова: динамика, устойчивость, спектральные проблемы, тензорные функции, определяющие соотношения, интегральные оценки.

Решение линеаризованной системы уравнений устойчивости невозмущенного процесса деформирования несжимаемого материала, задаваемого известными распределениями давления $p^\circ(\mathbf{x}, t)$, скорости $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x}, t)$ и напряжений $(-p\underset{\sim}{\mathbf{I}} + \underset{\sim}{\mathbf{s}}) \times (\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{x} \in \Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, $t > 0$, относительно неизвестных возмущений $\delta p(\mathbf{x}, t)$, $\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и $\delta\underset{\sim}{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t)$ заключается в решении в области Ω_t трех уравнений движения и условия несжимаемости

$$-\operatorname{grad}\delta p + \operatorname{div}\delta\underset{\sim}{\mathbf{s}}(\delta\mathbf{v}) = \rho\left[\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\delta\mathbf{v}\otimes\nabla)\cdot\mathbf{v}^\circ + (\mathbf{v}^\circ\otimes\nabla)\cdot\delta\mathbf{v}\right], \quad (1)$$

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Незамкнутая система (1), (2) должна быть дополнена связью $\delta\underset{\sim}{\mathbf{s}}(\delta\mathbf{v})$, следующей из линеаризации тензорно нелинейных определяющих соотношений материала [1]:

$$\underset{\sim}{\mathbf{s}}^\circ = A_1(I_{v2}^\circ, I_{v3}^\circ)\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ + A_2(I_{v2}^\circ, I_{v3}^\circ)\left(\underset{\sim}{\mathbf{v}}^{\circ 2} - \frac{1}{3}I_{v2}^{\circ 2}\underset{\sim}{\mathbf{I}}\right),$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ = \operatorname{def}\mathbf{v}^\circ, \quad I_{v2}^\circ = \sqrt{\operatorname{tr}\underset{\sim}{\mathbf{v}}^{\circ 2}}, \quad I_{v3}^\circ = \sqrt[3]{\operatorname{tr}\underset{\sim}{\mathbf{v}}^{\circ 3}}, \quad (3)$$

где I_{v2}° и I_{v3}° – квадратичный и кубический инварианты тензора скоростей деформаций $\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ(\mathbf{x}, t)$; $A_\alpha^\circ \equiv A_\alpha(I_{v2}^\circ, I_{v3}^\circ)$, $\alpha = 1, 2,$ – материальные функции определяющих соотношений (3), не меняющиеся при переходе из основного процесса в возмущенный. Эта тензорная связь имеет общий вид

$$\delta\underset{\sim}{\mathbf{s}} = \underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ\delta A_1 + A_1^\circ\delta\underset{\sim}{\mathbf{v}} + \left(\underset{\sim}{\mathbf{v}}^{\circ 2} - \frac{1}{3}I_{v2}^{\circ 2}\underset{\sim}{\mathbf{I}}\right)\delta A_2 + A_2^\circ\left(\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ\cdot\delta\underset{\sim}{\mathbf{v}} + \delta\underset{\sim}{\mathbf{v}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ - \frac{1}{3}(\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ : \delta\underset{\sim}{\mathbf{v}})\underset{\sim}{\mathbf{I}}\right), \quad (4)$$

$$\delta A_\alpha = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial I_{v2}}\right)^\circ \frac{\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ : \delta\underset{\sim}{\mathbf{v}}}{I_{v2}^\circ} + \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial I_{v3}}\right)^\circ \frac{\underset{\sim}{\mathbf{v}}^{\circ 2} : \delta\underset{\sim}{\mathbf{v}}}{I_{v3}^{\circ 2}}. \quad (5)$$

Для тензорно линейных или квазилинейных определяющих соотношений (3) скалярные связи (5) записываются в более простом виде

$$\delta\underset{\sim}{\mathbf{s}} = A_1^\circ(I_{v2})\delta\underset{\sim}{\mathbf{v}} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial I_{v2}}\right)^\circ \frac{\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ : \delta\underset{\sim}{\mathbf{v}}}{I_{v2}^\circ}\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ. \quad (6)$$

Для тела Бингама с пределом текучести σ_s и динамической вязкостью μ из (6) следует

$$\delta\underset{\sim}{\mathbf{s}} = \left(\frac{\sigma_s}{I_{v2}^\circ} + 2\mu\right)\delta\underset{\sim}{\mathbf{v}} - \sigma_s\frac{\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ : \delta\underset{\sim}{\mathbf{v}}}{I_{v2}^{\circ 3}}\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ. \quad (7)$$

Замкнутая система уравнений в возмущениях должна быть дополнена граничными условиями, заданными на невозмущенной поверхности $\partial\Omega_t$ области Ω_t, вообще говоря, меняющей свое положение в $\mathbb{R}_3$ со временем. Чаще всего, в силу простоты, выбираются условия прилипания $\delta\mathbf{v}\big|_{\partial\Omega_t} = 0$, однако могут быть использованы статические условия либо требования свободной границы.

Одними из методов исследования линеаризованной системы уравнений (1), (2), (4), (5) с соответствующими граничными условиями являются методы интегральных соотношений, интенсивно развиваемые в последние десятилетия применительно к материалам со сложными определяющими соотношениями [2–4]. Эти методы позволяют получать достаточные оценки устойчивости процесса, не находя точного либо приближенного решения линеаризованной задачи в каждой точке $x \in \Omega_t$ в любой момент t.

Большое внимание в исследовании уделяется частному случаю кинематики $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x}, t)$ невозмущенного процесса, а именно, одномерному плоскопараллельному установившемуся сдвигу $v_i^\circ(\mathbf{x},t) = v^\circ(x_2)\delta_{1i}$, $v^\circ \in C^2(0; 1)$, в слое $0 < x_2 < 1$. Для материалов с квазилинейной тензорной связью $\underset{\sim}{\mathbf{s}}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{v}}$ система (1), (2), (6) редуцируется к одному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx_2^2}+s^2\right)[T_\circ^\bullet(\varphi''+s^2\varphi)]-4s^2\left(\frac{T_\circ}{U^\circ}\varphi'\right)' = \tag{8}$$

$$= (\alpha + isv^\circ)(\varphi'' - s^2\varphi) - isv^{\circ''}\varphi,$$

$$\delta v_1 = \partial\delta\psi/\partial x_2, \quad \delta v_2 = -\partial\delta\psi/\partial x_1;$$

$$\delta\psi(x_1, x_2, t) =$$

$$= \varphi(x_2)\exp(isx_1 + \alpha t), \quad s > 0, \quad \alpha \in \mathrm{C},$$

$$T_\circ = \sqrt{\underset{\sim}{\mathbf{s}}^\circ : \underset{\sim}{\mathbf{s}}^\circ / 2}, \quad U^\circ = \sqrt{2\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ : \underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ} \equiv \sqrt{2} I_{v2}^\circ;$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{s}}^\circ = \frac{2T_\circ}{U^\circ}\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ, \quad T_\circ \equiv T(U^\circ(x)), \quad T_\circ^\bullet \equiv \frac{dT}{dU}(U^\circ(x)),$$

$$U^\circ = 2\,|v_{12}^\circ| = |v^{\circ'}|, \quad s_{12}^\circ = T_\circ \operatorname{sign} v_{12}^\circ;$$

$$T_\circ(0) = 0, \quad T_\circ^\bullet\big|_{U \ge 0} > 0,$$

являющемуся обобщением классического уравнения Орра–Зоммерфельда в линеаризованной теории устойчивости в механике сплошных сред. В уравнении (8) α – спектральный параметр, s – волновое число возмущения вдоль оси x_1; $T_\circ(U^\circ)$ – материальная функция упрочнения или реологическая кривая.

Выводятся обобщения теоремы Сквайра применительно к спектральным задачам для уравнения (8) [5], даются новые, более сильные чем ранее, оценки устойчивости [6, 7].

Список литературы

1. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
2. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 176 с.
3. Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2006. 394 с.
4. Георгиевский Д.В. Вариационные оценки и метод интегральных соотношений в задачах устойчивости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23. С. 96–146.
5. Georgievskii D.V. Applicability of the squire transformation in linearized problems on shear stability // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. V. 16, No 4. P. 478–483.
6. Георгиевский Д.В. Новые оценки устойчивости одномерных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости // ПММ. 2010. Т. 74, №4. С. 633–644.
7. Георгиевский Д.В. Обобщенные оценки Джозефа устойчивости плоских сдвиговых течений со скалярной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. физическая. 2010. Т. 74, №12. С. 1809–1812.

THE FORMULATIONS AND INTEGRAL METHODS OF THE ANALYSIS OF SPECTRAL PROBLEMS OF STABILITY IN CONTINUUM MECHANICS

D.V. Georgievskii

Formulations of new linearized problems of stability of deformation processes in incompressible materials with constitutive relations which can include tensor nonlinear functions are presented. Examples of reduction of these problems to spectral problems of stability are described. Integral equation methods permitting to obtain the sufficient stability estimates (with respect to the certain perturbation class) are developed.

Keywords: dynamics, stability, spectral problems, tensor functions, constitutive relations, integral estimates.