УДК 534.131.2

О КОРРЕКТНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В.Г. Григорьев, Е.В. Григорьева

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

valerygrigoriev@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Для решения задачи о колебаниях деформируемого упругого тела, содержащего внутри себя жидкость со свободной поверхностью или взаимодействующего с ограниченным объемом жидкости по части своей границы в условиях действия гравитационного поля, необходима корректная и непротиворечивая формулировка граничных условий на поверхности контакта разнородных сред. Предложена математическая формулировка соотношений на контактной поверхности двух сред, инвариантная по отношению к вводимой на этой поверхности криволинейной системе координат и основанная на векторной форме уравнений. Сформулирован вариационный принцип смешанного типа, обеспечивающий возможность эффективного применения к решению задачи трехмерных конечно-элементных моделей и разработки соответствующих алгоритмов.

Ключевые слова: упругое тело, жидкость, гравитация, вариационный принцип, собственные частоты, конечно-элементный расчет.

Рассматриваются малые колебания упругой конструкции с полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью либо контактирующей с ограниченным объемом жидкости (рис. 1).

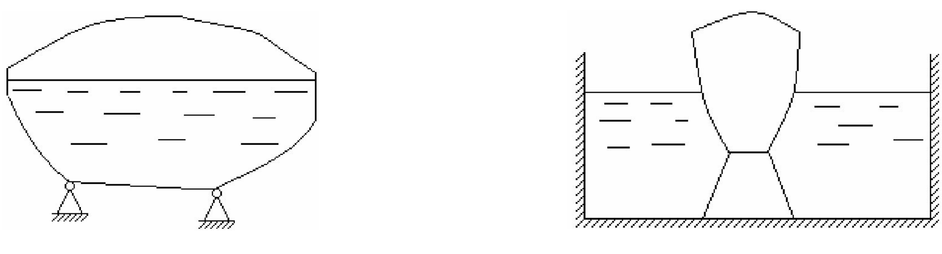

Рис. 1

Для эффективного применения численных методов к решению задач динамики таких конструкций необходимо иметь корректно сформулированный вариационный принцип. Этот вопрос применительно к осесимметричным конструкциям рассмотрен, например, в работах [1–3]. Преимущественное внимание к осесимметричным конструкциям было обусловлено потребностями ракетной техники. При их исследовании краевая задача может быть сведена к двумерной, что существенно облегчает ее решение. В случае более сложных конструкций задача остается существенно трехмерной, а современные универсальные конечно-элементные программные пакеты типа NASTRAN, ANSYS и другие не обеспечивают возможность корректного расчета динамических характеристик упругих конструкций, содержащих жидкость, с учетом волнообразования на свободной поверхности жидкости, в силу достаточно подробно описанных в [4] недостатков.

Важной компонентой в формулировке вариационного принципа является определяемая наличием гравитационных сил потенциальная энергия, связанная с изменением формы свободной поверхности жидкости и удерживающей жидкость поверхности твердого тела (заметим, что ошибочным является подход ряда исследователей, полагающих, что эта энергия определяется лишь изменением формы занимаемого жидкостью объема). Впервые корректный подход к формулировке выражения для потенциальной энергии гравитационных сил в жидкости применен в работе [2]. Он основан на том, что при записи динамических краевых условий для упругого тела на смоченной поверхности, необходимо учесть, что работа силы гидростатического давления совершается не только на нормальном к недеформированной поверхности перемещении, но и на касательных перемещениях, поскольку в процессе колебаний поверхность деформируется и нормаль изменяет свое направление, и здесь же необходимо учесть влияние растяжения или сжатия участка поверхности на совершаемую давлением работу [2, 5].

Изначально [2–4] оценка работы гидростатических сил на деформируемой поверхности твердого тела осуществлялась с использованием ортогональной криволинейной системы координат, вводимой на этой поверхности, и известных из теории оболочек выражений для углов поворота нормали к поверхности и растяжения–сжатия волокон вдоль координатных линий:

$$V_G = -\frac{1}{2}\int_{S_0} \{P_g[\hat{u}_1\theta_1 + \hat{u}_2\theta_2 + \hat{u}_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)] + \\ +\rho_0 \hat{u}_3 \mathbf{G}\cdot\mathbf{u}\} dS, \tag{1}$$

где S_0 – поверхность твердого тела, смоченная жидкостью; ρ_0 – плотность жидкости; P_g – гидростатическое давление на смоченной поверхности; $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ – координаты вектора смещения точки поверхности в локальном триэдре; θ_1, θ_2 – углы поворота нормали вокруг ортов локального триэдра; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – относительные удлинения волокон вдоль ортов; $\mathbf{G}$ – вектор интенсивности гравитационного поля; $\mathbf{u}$ – вектор смещения точки смоченной поверхности.

В случае трехмерной задачи существенное затруднение при конечно-элементном моделировании тонкостенных конструкций связано с тем, что вводимая на поверхности двумерного элемента локальная система координат не является ортогональной. Поэтому поиск решения проблемы был направлен на то, чтобы преобразовать выражение для потенциальной энергии колебаний к виду, применимому в любой неортогональной системе координат.

Нетрудно понять, что выражения для проекции нормали к деформированной поверхности на плоскость, касательную к недеформированной поверхности (для вычисления касательных составляющих вектора гидростатического давления), а также относительное изменение площади элемента поверхности можно вычислить в векторной форме с использование формул математического анализа, основываясь на произвольной, неортогональной параметризации поверхности.

После линеаризации полученных выражений с учетом малости колебаний при сохранении лишь членов первого порядка формула (1) заменяется формулой

$$V_G = -\frac{1}{2}\int_{S_0} \left\{ P_g\left(\mathbf{u}\cdot\left[\mathbf{r}_1\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\alpha_2} - \mathbf{r}_2\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\alpha_1}\right]\right) + \\ +\rho_0(\mathbf{G}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\right\} d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{2}$$

Здесь α_1, α_2 – криволинейные координаты на смоченной поверхности: $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$, а векторы

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\mathbf{r}(\alpha_1,\alpha_2), \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\mathbf{r}(\alpha_1,\alpha_2).$$

Полученное выражение может быть включено в формулировку вариационного принципа смешанного типа [1–3], обеспечивающего выполнение кинематических условий непротекания на смоченной поверхности твердого тела, что удобно для применения к решению задачи метода конечных элементов.

Выражение (2) использовано при выводе матриц жесткостей специальных конечных элементов для моделирования контактного взаимодействия деформируемого твердого тела с жидкостью в условиях действия гравитационного поля. Динамика свободной поверхности жидкости также моделируется с помощью двумерных элементов. Несжимаемая жидкость, поведение которой описывается посредством потенциала смещений, моделируется системой трехмерных конечных элементов. Что же касается взаимодействующей с жидкостью упругой конструкции, то для ее конечно-элементного моделирования можно успешно использовать средства популярных программных пакетов NASTRAN или ABAQUS, с помощью которых формируются матрицы масс и жесткостей конструкции. В дальнейшем эти матрицы дополняются строками и столбцами степеней свободы элементов жидкости, контактных элементов и элементов свободной поверхности для последующего вычисления собственных частот и форм колебаний гидроупругой системы и других динамических характеристик.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00381).

Список литературы

1. Горшков А.Г. и др. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.

2. Григолюк Э.И., Шклярчук Ф.Н. // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 401–411.

3. Григорьев В.Г. // Избранные проблемы прикладной механики и математики. М.: МАМИ, 2003. С. 93–126.

4. Григорьев В.Г. // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. 19-й Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. С. 51–54.

5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.

ON A CORRECT FORMULATION OF THE POTENTIAL ENERGY OF A FLUID INTERACTING WITH A DEFORMABLE BODY IN A UNIFORM GRAVITATIONAL FIELD

V.G. Grigoriev, E.V. Grigorieva

To solve the problems of vibration of a deformable elastic body containing a liquid with a free surface or interacting with a limited amount of fluid on the part of its border under the action of a gravitational field, a correct and consistent formulation of the boundary conditions at the interface of dissimilar media is necessary. A mathematical formulation of the relations at the contact surface of the two media is proposed, which is invariant with respect to a curvilinear coordinate system on the surface based on the vector form of equations. The variational principle of a mixed type has been formulated that allows effective application of three-dimensional finite element models to solve the problems and development of appropriate algorithms.

Keywords: elastic body, liquid, gravitation, variational principle, eigenfrequencies, finite element analysis.