Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2135–2137

УДК 539.3

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

О.В. Денина

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

olga_rostov1983@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассмотрена обратная задача о реконструкции трех неоднородных характеристик стержня: модуля Юнга, модуля сдвига и плотности по амплитудно-частотным характеристикам в режиме установившихся продольных, изгибных и крутильных колебаний. Для идентификации неизвестных характеристик построены итерационные процессы, основанные на аппарате интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода. Обсуждены некоторые аспекты численной реализации и результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: обратная задача, стержневые системы, неоднородности, интегральные уравнения Фредгольма.

Исследование обратных коэффициентных задач для общего случая упругого тела

В статье [1] была рассмотрена обратная коэффициентная задача о восстановлении неоднородных характеристик модуля упругости и плотности по информации о поле перемещений на части границы $f_i(x, \omega)$ для общего случая упругого тела.

Для решения описанной задачи на основе обобщенного соотношения взаимности было получено операторное уравнение

$$\int_V c_{ijkl}^{(n)} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} dV - \omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV +$$
$$+ \int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS = 0, \qquad (1)$$
$$\omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (n = 1, 2, ..., N).$$

Соотношение (1) можно трактовать как линейное интегральное уравнение относительно компонент тензора упругих модулей $c_{ijkl}^{(n)}(x)$ и плотности $\rho^{(n)}(x)$, если предварительно решена прямая задача о нахождении полей смещений $u_i^{(n-1)}$ и деформаций $u_{i,j}^{(n-1)}$ внутри области V и на ее границе S с упругими характеристиками $c_{ijkl}^{(n-1)}(x)$ и $\rho^{(n-1)}(x)$. Отметим, что одного такого уравнения недостаточно для определения всех характеристик, и поставленная задача требует исследования, особенно для простых моделей, таких как стержни, для которых просто произвести эксперименты по определению амплитудно-частотных характеристик. Заметим, что подынтегральные выражения в объемных интегралах в (1) представляют собой по форме аналоги удвоенной удельной потенциальной энергии деформаций и удельной кинетической энергии, в которой перемещения и деформации соответствуют $(n-1)$-й итерации (предыдущей), а модули – n-й итерации (последующей). Мерой выхода из итерационной процедуры является функционал $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S_\sigma} (f_i - u_i^{(n-1)})^2 dS d\omega$, и если его значение становится меньше погрешности входной информации, то процесс необходимо остановить.

Вывод операторных уравнений для задачи о реконструкции неоднородных характеристик стержневой системы

Применим теперь данный подход для вывода операторных уравнений для задачи о рекострукции всех механических характеристик $E(x)$, $G(x)$, $\rho(x)$ упругого изотропного неоднородного стержня. При этом достаточно лишь вычислить удельные потенциальную и кинетические энергии. Отметим, что $V = [0, l] \times F$, где F характеризует поперечное сечение стержня.

Будем считать известной информацию об амплитудно-частотных характеристиках торца консольно защемленного стержня следующего вида: $u(l, \omega) = f_1(\omega)$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, для продольных колебаний; $w(l, \omega) = f_2(\omega)$, $\omega \in [\omega_3, \omega_4]$, для изгибных колебаний; $v(l, \omega) = f_3(\omega)$, $\omega \in [\omega_5, \omega_6]$, для крутильных колебаний, по которой требуется определить неизвестные функции $E(x)$, $G(x)$, $\rho(x)$.

Для определения неизвестных функций предложена следующая схема: на первом этапе на основе совместного анализа продольных и изгибных колебаний определяются функции, характеризующие законы изменения модуля Юнга $E(x)$ и плотности $\rho(x)$; на втором этапе при известной функции плотности из анализа крутильных колебаний определяется функция, характеризующая закон изменения модуля сдвига $G(x)$.

Рассмотрим призматический стержень, вдоль оси которого направим ось Ox_1. При продольных колебаниях из компонент вектора перемещений отлична от нуля только одна компонента: $u = u_1(x_1)$, $u_2 = u_3 = 0$, а из компонент тензора напряжений отлична от нуля компонента σ_{11}.

Потенциальная энергия в этом случае имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon_{11}^2 dV =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^l \int_F E(u')^2\,dFdx = \frac{1}{2}\int_0^l EF(u')^2\,dx;$$

кинетическая энергия имеет вид

$$K = \omega^2 \frac{1}{2}\int_V \rho u_i^2 dV = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^l \int_F \rho u^2 dFdx =$$
$$= \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^l \rho F u^2 dx.$$

Тогда операторное уравнение, соответствующее (1), запишется в виде:

$$\int_0^l \left(\frac{du^{(n-1)}(x,\omega)}{dx}\right)^2 F(x)E^{(n)}(x)dx -$$
$$-\omega^2 \int_0^l (u^{(n-1)}(x,\omega))^2 F(x)\rho^{(n)}(x)dx = \tag{2}$$
$$= P(f_1(\omega) - u^{(n-1)}(l,\omega)), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

Аналогично были получены операторные уравнения для изгибных и для крутильных колебаний соответственно:

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 w^{(n-1)}(x,\omega)}{dx^2}\right)^2 J(x)E^{(n)}(x)dx -$$
$$-\omega^2 \int_0^l (w^{(n-1)}(x,\omega))^2 F(x)\rho^{(n)}(x)dx = \tag{3}$$
$$= -P(f_2(\omega) - w^{(n-1)}(l,\omega)), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4],$$

$$\int_0^l \left(\frac{dv^{(n-1)}(x,\omega)}{dx}\right)^2 J_p(x)G^{(n)}(x)dx =$$
$$= M(f_3(\omega) - v^{(n-1)}(l,\omega)), \quad \omega \in [\omega_5, \omega_6]. \tag{4}$$

Численная реализация

Отметим, что каждый шаг итерационного процесса требует решения прямой задачи с уточненными характеристиками. Прямые задачи решались с помощью сведения к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода, также как и в [2, 3]. Таким образом, на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода построены итерационные процессы для идентификации неизвестных функций, которые позволили осуществить расщепление исходной обратной задачи на последовательность задач двух типов: решение прямой задачи с переменными коэффициентами и определение поправок на основе решения стандартной некорректной задачи - обращения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром. На первом этапе задачи для определения модуля Юнга и плотности на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (2), (3). На втором этапе задачи для восстановления модуля сдвига на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода (4).

Проведена серия вычислительных экспериментов в задачах идентификации переменных механических характеристик стержня при различных видах неоднородностей.

На первом этапе рассчитывались смещения торцов стержня при анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний в зависимости от частоты колебаний при выбранных законах неоднородности. Эти данные затем использовались при решении задач идентификации неоднородных свойств. Результаты экспериментов показали: предложенный подход позволяет достаточно эффективно восстанавливать гладкие законы неоднородности: полиномиальные, тригонометрические, функции с большим градиентом (для восстановления с погрешностью не более 8% достаточно 5-7 итераций).

Кусочно-постоянные неоднородности восстанавливаются значительно хуже. Результатом восстановления таких функций на основе предложенного способа являются гладкие функции, близкие к исходным в среднеквадратичном.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №10-01-00194-а, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Список литературы

1. Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Докл. РАН. 2005. Т. 405, №3. С. 343–345.

2. Бочарова О.В., Ватульян А.О. Обратные задачи

для упругого неоднородного стержня // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2008. №3. С. 33–37.

3. Бочарова О.В., Ватульян А.О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустич. журн. 2009. Т. 55, №3. С. 275–282.

A RECONSTRUCTION OF INHOMOGENEITIES IN BAR SYSTEMS

O.V. Denina

The inverse problem, concerning the reconstruction of the three following inhomogeneous properties of a bar is considered: Young modulus, shear modulus and density using amplitude-frequency characteristics of steady-state longitudinal, bending and torsion vibrations of the bar. To identify unknown properties of the material, iteration processes based on the apparatus of Fredholm integral equations of the first and the second kinds are constructed. Some aspects of numerical implementation and the results of numerical experiments are discussed.

Keywords: inverse problem, bar systems, inhomogeneities, Fredholm integral equations.