Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2154–2156

УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

С.И. Жаворонок

Институт прикладной механики РАН, Москва

zhavor71@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Для построения модели толстостенной анизотропной оболочки использован вариационный подход. Постулируется существование потенциальной и кинетической энергии оболочки как трехмерного упругого тела. Определено энергетическое скалярное произведение, задающее упругий потенциал. В качестве переменных поля континуальной механической системы приняты коэффициенты Фурье вектора перемещения в функциональном базисе, образованном полиномами Лежандра от координаты, нормальной к базовой поверхности оболочки. На основе формулировки потенциала и кинетической энергии относительно переменных поля получены уравнения движения оболочки в форме Лагранжа второго рода и их естественные краевые условия в обобщенных силах, являющихся моментами тензора напряжения относительно базисных функций. Приближенная модель оболочки строится в рамках трехмерной теории оболочек *N*-го порядка.

Ключевые слова: оболочки толстостенные анизотропные, уравнения вариационные, поля переменные, Лежандра полиномы.

Постановка задачи

Оболочка занимает область $\Omega \subset \mathrm{R}^3$, ограниченную поверхностью $\partial\Omega = S_F \cup S_B$, где S_F – лицевые, S_B – боковые поверхности. Базисная поверхность оболочки $S_0 \subset \mathrm{R}^3$, в общем случае $S_0 \not\subset \Omega$. Геометрия оболочки описана в соответствии с [1] в системе криволинейных координат ξ^1, ξ^2, ζ.

Предположим, что существует плотность упругого потенциала деформации сплошной среды:

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \mathbf{u}), \qquad (1)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – симметрический тензор напряжения, $\mathbf{u}$ – вектор перемещения, «:» – произведение тензоров с двойной сверткой. Пусть заданы кинематические связи вида

$$\mathbf{u}\big|_{S_u} = \mathbf{u}^*, \quad S_u \subseteq S_B. \qquad (2)$$

Плотность кинетической энергии и работа главного вектора внешних сил имеют вид

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{u},$$
$$\mathrm{A} = \int_\Omega \mathbf{X}\cdot\mathbf{u}\,d\Omega + \int_{S_\sigma} \mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\,dS, \quad S_\sigma \supseteq S_F. \qquad (3)$$

Постановка динамической задачи теории упругости с начальными условиями

$$\mathbf{u}\big|_{t=t_0} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}\big|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0 \qquad (4)$$

определяется вариационным принципом Гамильтона [2]

$$\delta\mathrm{H} = 0, \ \ \mathrm{H} = \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\mathrm{L}}\,dt, \ \ \widehat{\mathrm{L}} = \int_\Omega (\mathrm{T} - \mathrm{U})\,d\Omega + \mathrm{A}, \qquad (5)$$

где H – функционал Гамильтона, $\widehat{\mathrm{L}}$ – функция Лагранжа.

Формулировка уравнений Лагранжа II рода для континуальной механической системы

Пусть в континуальной механической системе существует плотность функции Лагранжа

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathbf{u}_I, \dot{\mathbf{u}}_I, L_J[\mathbf{u}_I]), \quad \forall\mathbf{u}_k \in D_J, \forall\alpha^k \in \mathrm{R},$$
$$L_J = [{}^k\mathbf{u}_k] = \alpha^k L_J[\mathbf{u}_k]), \quad k = 1,2,\ldots,N, \qquad (6)$$

с потенциалом, определяемым скалярным произведением в виде

$$\mathrm{U} = (\mathbf{T}^{IJ}, L_J[\mathbf{u}_I])_\Omega = \int_\Omega \mathbf{T}^{IJ} : L_J[\mathbf{u}_I]\,d\Omega, \qquad (7)$$

где $\mathbf{u}_I$, $I = 1, \ldots, N$, – обобщенные координаты, $\mathbf{T}^{IJ}$, $J = 1, \ldots, M$, – обобщенные силы, $\mathbf{L}_J[\mathbf{u}_I]$ – линейные операторы. Тогда, обобщая [2], получим условие стационарности (5) при (6), (7) и начальных условиях (4) в виде системы уравнений Лагранжа II рода и их естественных краевых условий:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_I} + L_J^*\left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(L_J[\mathbf{u}_I])}\right] + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathbf{u}_I} = 0, \qquad (8)$$

$$B_J\left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(L_J[\mathbf{u}_I])}\right]\delta\mathbf{u}_I\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad I=1,\dots,N. \qquad (9)$$

Здесь L_J^* – оператор, сопряженный оператору в смысле скалярного произведения (7), B_J – краевой оператор, связанный с сопряженным оператором L_J^*.

Уравнения Лагранжа II рода для упругой анизотропной оболочки в рамках теории *N*-го порядка

С учетом записи оператора ∇ в неголономном относительно ξ^1, ξ^2 сопутствующем базисе $\mathbf{r}^\alpha$, $\mathbf{n}$ [3], не зависящем от нормальной к S_0 координаты ζ, получим дисторсию и плотность потенциала (1) [1]

$$\mathbf{d}=A_{\bullet\alpha}^{\delta\bullet}[(\overline{\nabla}_\delta u_\beta-b_{\delta\beta}u_\zeta)\mathbf{r}^\alpha\otimes\mathbf{r}^\beta+(\partial_\delta u_\zeta+$$
$$+b_\delta^\gamma u_\gamma)\mathbf{r}^\alpha\otimes\mathbf{n}]+\partial_\zeta u_\beta\mathbf{n}\otimes\mathbf{r}^\beta+\partial_\zeta u_\zeta\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \qquad (10)$$

$$2\mathrm{U}=(\sigma^{\alpha\beta},A_{\bullet\alpha}^{\delta\bullet}[\overline{\nabla}_\delta u_\beta-b_{\delta\beta}u_\zeta])_\Omega+$$
$$+(\sigma^{\zeta\alpha},A_{\bullet\alpha}^{\delta\bullet}[\partial_\delta u_\zeta+b_\delta^\gamma u_\gamma])_\Omega+$$
$$+(\sigma^{\beta\zeta},\partial_\zeta u_\beta)_\Omega+(\sigma^{\zeta\zeta},\partial_\zeta u_\zeta)_\Omega, \qquad (11)$$

где A – компоненты тензоров параллельного переноса [3], $\overline{\nabla}$ – оператор «набла» на поверхности S_0. В системе координат ξ^1, ξ^2, ζ: $\xi^1, \xi^2\in$ $\in D_\xi\subseteq\mathrm{R}^2$, $\zeta\in[h_-,h_+]\subseteq\mathrm{R}$, скалярное произведение (7) имеет вид

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_\Omega=((\mathbf{u},\mathbf{v})_h)_{S_0},\quad (\mathbf{u},\mathbf{v})_{S_0}=\int_{S_0}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,dS_0,$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_h=\int_{h_-}^{h_+}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}(1-2\zeta H+\zeta^2K)d\zeta. \qquad (12)$$

Здесь $H=1/2b_\alpha^\alpha$, $K=\det(b_\alpha^\beta)$, b_α^β – компоненты тензора кривизны S_0. Введем в $D_L\in L^2[h_-,h_+]$ базис, образованный полиномами Лежандра $p_{(k)}(\zeta)$ [1, 4, 5]:

$$\mathbf{u}(\xi^1,\xi^2,\zeta)=\mathbf{u}^{(k)}(\xi^1,\xi^2)p_{(k)}(z),\quad D_L=\{p_{(k)}\},$$

$$k=0,\dots,N,\quad \int_{h_-}^{h_+}p_{(k)}p_{(m)}d\zeta=\delta_{(km)}, \qquad (13)$$

где $\mathbf{u}^{(k)}(\xi^1,\xi^2)$, $k=0,1,\dots,N$, – обобщенные координаты в пространстве состояний оболочки. С учетом (11)–(13) и рекуррентных соотношений для $p_{(k)}(\zeta)$ [4] запишем потенциал (11), кинетическую энергию и работу внешних сил (3) относительно $\mathbf{u}^{(k)}(\xi^1,\xi^2)$ и получим уравнения Лагранжа (8) для теории оболочек N-го порядка [1, 3–6] для случая постоянной толщины $h=h_+-h_-$:

$$\rho_{(k)}^{(m)}\ddot{u}_{(m)}^{\alpha}=\overline{\nabla}_\beta\overline{\sigma}^{\alpha\beta}+b_\beta^\alpha\overline{\sigma}^{\zeta\beta}+S_{(k)}^{(m)}\overline{\sigma}_{(m)}^{\alpha\zeta}+Q_{(k)}^\alpha,$$
$$(14)$$
$$\rho_{(k)}^{(m)}\ddot{u}_{(m)}^{\zeta}=\overline{\nabla}_\beta\overline{\sigma}^{\zeta\beta}-b_{\alpha\beta}\overline{\sigma}^{\alpha\beta}+R_{(k)}^{(m)}\overline{\sigma}_{(m)}^{\zeta\zeta}+Q_{(k)}^\zeta.$$

Естественные краевые условия (9) имеют вид:

$$[\overline{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta}\nu_\beta-q_{(k)}^\alpha]\delta u_\alpha^{(k)}=0,$$
$$[\nu_\beta\overline{\sigma}_{(k)}^{\zeta\beta}-q_{(k)}^\zeta]\delta u_\zeta^{(k)}=0. \qquad (15)$$

Здесь введены компоненты тензора моментов k-го порядка напряжения, главных векторов внешних сил $Q_{(k)}^i$ на S_0 и $q_{(k)}^i$ на $\Gamma_\sigma=\partial S_0\cap S_\sigma$ и тензора моментов плотности $\rho_{(m)}^{(k)}$:

$$\overline{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta}=(A_{\bullet\gamma}^{\alpha\bullet}\sigma^{\gamma\beta},p_{(k)})_h,\quad \overline{\sigma}_{(k)}^{\alpha\zeta}=(A_{\bullet\gamma}^{\alpha\bullet}\sigma^{\gamma\zeta},p_{(k)})_h,$$
$$\overline{\sigma}_{(k)}^{\zeta\alpha}=(\sigma^{\zeta\alpha},p_{(k)})_h,\quad \overline{\sigma}_{(k)}^{\zeta\zeta}=(\sigma^{\zeta\zeta},p_{(k)})_h,$$
$$\overline{\sigma}_{(k)}^{ij}\neq\overline{\sigma}_{(k)}^{ji},\quad \rho_{(k)}^{(m)}=(\rho\,p^{(m)},p_{(k)})_h,$$
$$Q_{(k)}^i=(X^i,p_{(k)})_h+(\pm1)^k(1-2h_\pm H+h_\pm^2K)q_\pm^i,$$
$$q_{(k)}^i=\int_{h_-}^{h_+}q^i\sqrt{g_B}\,p_{(k)}d\zeta. \qquad (16)$$

Кинематические соотношения следуют из (10) при симметрировании и применении разложений (13) и имеют общий вид, приведенный в [1]. Физические соотношения следуют из (11) при применении (13) и (16) и аналогичны по структуре соотношениям, приведенным в [1]. Структура линейных операторов в уравнениях (14) также аналогична описанной в [1]. Начальные условия следуют при использовании (13) из соотношений (4), кинематические краевые условия – из соотношений (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00704-а) и грантом Президента РФ НШ-64683.2010.8.

Список литературы

1. Жаворонок С.И. Модели высшего порядка анизотропных оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14, №4. С. 561–571.

2. Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. Аналитическая механика континуальных систем. Киев: Наук. думка, 1979. 188 с.

3. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М: Наука, 1982. 282 с.

4. Амосов А.А. Приближенная трехмерная теория толстостенных пластин и оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 1987. №5. С. 37–42.

5. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Львов: Вища школа, 1978.

192 с.

6. Хома И.Ю. Общая теория анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 170 с.

7. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 351 с.

8. Кильчевский Н.А., Издебская Г.А., Киселевская Л.М. Лекции по аналитической механике оболочек. Киев: Вища школа, 1974. 232 с.

VARIATIONAL EQUATIONS OF A THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC THEORY OF SHELLS

S.I. Zhavoronok

A model of a thick-walled anisotropic shell is constructed based on the variational approach. The existence of both kinetic and potential energy is postulated for a shell as for a three-dimensional anisotropic elastic body, and the energy scalar product is defined. Fourier coefficients of the translation vector in the functional basis generated by Legendre polynomials are used as field variables of a continuum system. Using the potential and kinetic energy formulated in terms of field variables the equations of motion and its boundary conditions are derived. These equations have the form of a Lagrange system of the second kind for continua, written in terms of generalized forces that are stress tensor moments in the functional basis implemented. The proposed approximate model of a thick shell is formulated as a N-th-order shell theory.

Keywords: thick anisotropic shells, variational equations, field variables, Legendre polynomials.