УДК 539.3

ТРЕХМЕРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ СЛОИСТЫХ ПЛИТ

Д.Д. Захаров

Московский госуниверситет путей сообщения

dd_zakh@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследуются соотношения обобщенной ортогональности в слоисто-изотропных и трансверсально-изотропных упругих пакетах. Выводится явный вид соотношений, анализируется их физический смысл. Приводятся обобщения для случая бесконечных толщин и для случая контакта с идеальной жидкой средой. Анализируются краевые задачи с дискретным спектром, выводится модальная формулировка принципа излучения на границе некоторого конечного виртуального цилиндра, содержащего источники возмущений конечного размера. Обсуждается применение изложенного формализма в задачах о распространении и рассеянии волн в упругих телах.

Ключевые слова: трехмерные волны, соотношения ортогональности, слоистые пластины, неотражающие краевые условия, краевые задачи, асимптотика.

Двухмерные и трехмерные соотношения ортогональности

Как известно, однородные решения в краевых задачах для упругих слоистых пластин и цилиндров, как правило, не являются ортогональными в обычном смысле и спектр такой краевой задачи общего вида комплекснозначный. Тем не менее, для двухмерных задач оказалось возможным найти некоторые другие соотношения между различными решениями, названные соотношениями обобщенной ортогональности (СОО). В задачах статики такой подход имеет уже более чем столетнюю историю, начиная, видимо, с наиболее ранних работ П.А. Шиффа [1] (1883). В стационарных задачах динамики подобные соотношения для плоских волн в упругой полоске и цилиндре активно исследовались в 70-е годы XX века [2–8]. Трехмерные соотношения для задач динамики в изотропном теле удалось получить гораздо позже [9–11].

Рассматриваются СОО для собственных волн в слоистом пакете (плите) из изотропных и трансверсально-изотропных линейно-упругих слоев. На лицевых поверхностях предполагаются выполненными однородные граничные условия, обеспечивающие полное отражение энергии волны внутрь слоя. Также анализируются допустимые условия межслойного контакта, для которых сохраняются СОО. Приводится явный вид собственных волн и дисперсионные соотношения. Следует специально отметить, что для выбранного представления дисперсионные уравнения принимают такой же вид, как и для задачи с плоской геометрией, и собственные числа (спектр) находится только один раз.

Показано, что итоговые СОО могут быть получены как непосредственно из уравнений упругости, так и с использованием соотношений взаимности. Физический смысл СОО заключается в том, что они приводят к аддиттивности потоков мощности собственных волн и отражают специфику их взаимодействия с границей. Выражения для обобщенного произведения собственной волны на себя появляются также непосредственно для выражений потока мощности волны через боковую поверхность плиты, т.е. в формулировке условий излучения.

Полученные СОО обобщаются на некоторые другие практически важные случаи: замена твердых слоев слоями идеальной жидкости (гравитационные эффекты в жидкости также допускаются) приводит к некоторой модификации СОО, с аналогичными утверждениями о физическом смысле соотношений.

Доказывается, что в том случае, когда толщины каких-либо слоев бесконечны, найденные СОО выполняются между волнами дискретной части спектра и тогда, когда одна из волн отвечает дискретной, а другая – непрерывной части спектра.

Применение СОО к задачам расчета полей источников и к задачам дифракции

Выведенные СОО выполнены для трехмерных волн, в которых закон их распространения в продольном направлении определяется комбинацией тригонометрических функций от угла (в цилиндрических координатах с вертикальной осью, перпендикулярной границам раздела) и цилиндрической функцией любого типа от произведения волнового числа и радиуса, т.е. по сути, реализовано разделение переменных. Для наших целей существенно, что собственные волны могут быть разнотипными по виду радиальной функции – распространяющиеся волны с функциями Ханкеля первого или второго рода, стоячие волны с функциями Бесселя и/или Неймана и т.д. Использование СОО, вронскианов и некоторых вспомогательных решений позволяет получать точные значения амплитуд гармонических волн дискретного спектра, порождаемые поверхностными и/или объемными динамическими источниками с конечным размером в плане. Наиболее простой вид принимают выражения для компонент тензоров Грина для объемной и/или поверхностной нагрузки.

Полагая, что бесконечная часть плиты расположена вне некоторого конечного виртуального цилиндра, коэффициенты при собственных волнах в такой области выражаются либо через интегралы по боковой поверхности виртуального цилиндра, либо через интегралы по самим источникам (объемным или поверхностным), где содержатся функции источников и вспомогательные решения специального вида.

Разработанный формализм для волн дискретного спектра используется также при выводе условий Дирихле – Неймана (DtN) на границе некоторого виртуального цилиндра, объемлющего источник, включение, трещину и т.п. Технически эти условия удается получить за счет эффективного суммирования рядов соответствующих цилиндрических функций. Применение полученных условий DtN для волн, удовлетворяющих условиям излучения, позволяет, например, модифицировать ряд вычислительных алгоритмов (метода конечных элементов, граничных элементов, конечных разностей и т.д.) для расчета конфигураций, содержащих внешнюю область в виде бесконечной пластины. Такую внешнюю область можно заменить виртуальным цилиндром конечного размера, на боковой поверхности которого условия излучения на бесконечность приближенно заменяются системой условий DtN. Для задач с двумерной геометрией аналогичный подход уже был успешно опробован [12].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №11-08-00692.

Список литературы

1. Schiff P.A. Sur l'equilibre d'un cylindre elastique // J. Math. Pure et Appl. 1883. Ser. III. Vol. 9. P. 407–424.

2. Auld A., Kino G.S. Normal mode theory for acoustic waves and its application to interdigital transducer // IEEE Trans. on Electron Devices. 1971. Vol. ED-18, No 10. P. 898–908.

3. Бобровницкий Ю.И. Соотношения ортогональности для волн Лэмба // Акуст. журн. 1972. Т. 18. Вып. 4. С. 513–515.

4. Федорюк М.В. Соотношения типа ортогональности в твердых волноводах // Акуст. журн. 1974. Т. 20. Вып. 2. С. 310–314.

5. Fraser W.B. Orthogonality relations for Rayleigh-Lamb modes of vibration of a plate // J. Acoust. Soc. of Am. 1976. Vol. 59. P. 215–216.

6. Prakash B.G. Generalized orthogonality relations for rectangular strips in elastodynamics // Mechs. Res. Comm. 1978. Vol. 5, No 4. P. 251–255.

7. Зилъберглейт А.С., Нуллер Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. Вып. 2. С. 333–335.

8. Слепян Л.И. Теорема Бетти и соотношения ортогональности для собственных функций // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. №1. С. 83–87.

9. Захаров Д.Д. Соотношения обобщенной ортогональности для собственных функций в пространственных задачах динамики упругого слоя // Изв. АН СССР. 1988. №6. С. 62–68.

10. Achenbach J.D., Xu Y. Wave motion in an isotropic elastic layer generated by timeharmonic load of arbitrary direction // J. Acoust. Soc. of Am. 1999. Vol. 106. P. 83–90.

11. Zakharov D.D. Orthogonality of 3D guided waves in viscoelastic laminates and far field evaluation to a local acoustic source // Int. J. of Solids and Structures. 2008. Vol. 45, No 6. P. 1788–1803.

12. Baronian V., Bonnet-Ben Dhia A.S., Luneville E. Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide // J. Comp. Appl. Math. 2010. Vol. 234, No 6. P. 1945–1952.

THREE-DIMENSIONAL ORTHOGONALITY RELATIONS FOR EIGENWAVES AND THEIR IMPLEMENTATION FOR THE DYNAMIC PROBLEMS OF LAYERED SLABS

D.D. Zakharov

The orthogonality relations for 3D waves in layered transversely isotropic slabs are derived in the explicit form. Their physical meaning is discussed. Some generalizations for the cases of infinite media or for the case of fluid loaded slabs are considered. The boundary value problems with a discrete spectrum are analyzed; a modal formulation of the transparent boundary conditions is suggested for the lateral surface of a virtual cylinder including all sources, scatterers, etc. The applications of the presented formalism to the problem of wave propagation and diffraction in elastic solids are discussed.

Keywords: 3D modes, orthogonality relations, layered plates, transparency conditions, boundary value problems, asymptotics.