УДК 534.1

# РЕЗОНАНСНЫЙ РЕЖИМ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ЗОНАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ РОТОРОВ



**_М.Ф. Зейтман_**

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

zeitman@yandex.ru

*Поступила в редакцию 24.08.2011*

Рассматриваются различные режимы автоколебаний гибких гироскопических роторов. Движение изучаемых структур описывается квазилинейными неоднородными дифференциальными уравнениями в частных производных. Вибрации в областях неустойчивости их изгибных колебаний носят почти периодический автоколебательный характер. Применением метода прямого разделения движений предложена процедура построения почти периодических решений уравнений движения. Возможны два режима автоколебаний: нерезонансный и резонансный (критический). Большее внимание уделено резонансному случаю. Для него получены стационарные решения, отвечающие искомым автоколебаниям.

*Ключевые слова:* гибкий гироскопический ротор, автоколебания ротора, почти периодическое решение, области неустойчивости.

Структура рассматриваемого гибкого гироскопического ротора имеет самый общий характер и все его элементы – жесткие или упругие опоры, дискретные массы и континуально заданные участки – не имеют никаких ограничений по размещению, форме или численным параметрам. Поэтому обозначим через $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ – проекции прогиба оси вала изучаемой системы на неподвижные плоскости. Эти функции в интервале $0 < x < l$ должны удовлетворять квазилинейным дифференциальным уравнениям движения

$$\frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \mu\chi \frac{\partial u_j}{\partial t} = f_j(x,t) + \\ + \mu F_j(\mu, t, x, u_1, u_2, \ldots, u_{1t}, u_{2t}) \qquad (1)$$

и краевым условиям

$$x = 0, \quad u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0;$$

$$x = l, \quad \sigma \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = -K_1 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x \partial t^2} + i^{2j} K_0 \omega \frac{\partial^2 u_{j\pm 1}}{\partial x \partial t} - \\ - c \frac{\partial u_j}{\partial x} + g_j(t) - \mu\chi_1 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial t} + \mu G_j(\mu, t, u_1, \ldots, u_{2t}),$$

$$\sigma \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + q_j(t) + \mu\chi_2 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \\ + \mu Q_j(\mu, t, u_1, \ldots, u_{2t}), \quad i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2, \qquad (2)$$

где $f_j$, $F_j$ – распределенное силовое воздействие на единицу длины вала ротора; $g_j$, $G_j$ – сосредоточенное моментное возмущение системы в точках закрепления дискретных дисков по углу поворота касательной в них к изогнутой оси вала; $q_j$, $Q_j$ – сосредоточенное силовое возбуждение в точках сопряжения произвольных дискретных масс. Все они непрерывные, но, в отличие от [1], почти периодические функции времени $t$, а $\mu$ – малый параметр. Помимо этого, нелинейные почти периодические функции $F_j$, $G_j$, $Q_j$ предполагаются аналитическими относительно величин в круглых скобках. Параметры $\rho, \sigma, K_1, K_0, \omega, c, x, x_1, x_2$ – постоянные массовые, геометрические, динамические, кинематические, упругие и демпфирующие характеристики гироскопического валопровода.

Переменные $f_j$, $g_j$, $q_j$ можно исключить соответствующей подстановкой, и тогда почти периодическое решение (1), (2) ищем методом прямого разделения движений [2]. Вводя одновременно «медленное» время $\tau = \mu t$, разложим в ряд по $\mu$ функции прогиба [3]:

$$u_j(x,t) = u_j^0(x,t,\tau) + \mu u_j^{(1)}(x,t,\tau) + \\ + \mu^2 u_j^{(2)}(x,t,\tau) + \ldots \qquad (3)$$

Здесь $t$ – «быстрое» время, $u_j^0(x,t,\tau)$, $u_j^{(1)}(x,t,\tau)$, … – почти периодические функции $t$, а $\tau$ входит в них как параметр.

В порождающей системе (1), (2) исследуем многочастотные автоколебания [4], отвечающие собственным частотам $\lambda_s$ $(s = 1, \ldots, k)$ и собственным функциям $Y_{js}(x, \lambda_s)$ изгибных колебаний линейной гиромодели [1]. В нерезонансном случае [5] частотам $\lambda_s$ соответствует одна пара простых корней $\pm\lambda_s$ фундаментального уравнения. Тогда нулевое приближение почти периодического решения (3) можно записать

$$u_j^0(x,t,\tau)=\sum_{s=1}^{k} u_{js}^0(x,t,\tau),$$
$$u_{js}^0(x,t,\tau)=i^{j-1}[-i^{2j}A_{1s}(\tau)\exp i\lambda_s t+ \\ +A_{2s}(\tau)\exp(-i\lambda_s t)]Y_{js}(x,\lambda_s), \quad (4)$$
$$A_{ms}=c_{ms}(\tau)\exp i\varphi_{ms}(\tau), \quad m=1,2,$$

где $Y_{js}(x,\lambda_s)$ – собственные формы линейной гиромодели, величины $A_{ms}(\tau)$ – функции «медленного» времени $\tau$, а $c_{ms}(\tau)$, $\varphi_{ms}(\tau)$ – их амплитуды и фазы.

Исследование первого приближения $u_j^{(1)}(x,t,\tau)$ приводит к уравнениям относительно $A_{ms}(\tau)$. Подстановка (3) в (1), (2) дает их в замкнутой форме.

Пусть часть собственных частот $\lambda_s$ ($s=1,\dots,q$, $q<s$) и частоты возмущающих сил в правых частях (1), (2) $\omega_s$ ($s=1,\dots,p$) связаны $n$ линейно независимыми целочисленными резонансными соотношениями [4]:

$$\Delta_r=m_1^{(r)}\lambda_1+\ldots+m_q^{(r)}\lambda_q+n_1^{(r)}\omega_1+\ldots+ \\ +n_p^{(r)}\omega_p=0 \quad (r=1,\dots,n), \quad (5)$$

причем $m_s^{(r)}$, $n_s^{(r)}$ – целые положительные или отрицательные числа, не все одновременно равные нулю.

При выполнении условия (5) и нерезонансном режиме автоколебаний частные решения $u_{js}^{(1)}$, соответствующие их правым частям с разделяющимися гармониками и учетом (4), можно представить так [3]:

$$u_j^{(1)}(x,t,\tau)=i^{j-1}\sum_{s=1}^{k}[y_{j1}(x,\lambda_s,\tau)\exp i\lambda_s t+ \\ +y_{j2}(x,\lambda_s,\tau)\exp(-i\lambda_s t)]+z_j(x,t,\tau)\ldots, \quad (6)$$

где $y_{jm}$ от $t$ не зависит, а $z_j$ – почти периодическая функция $t$, определяющая такое же решение $u_j^{(1)}$.

Подстановка (6) в дифференциальные уравнения для $u_j^{(1)}$ дает для $y_{jm}(x,\lambda_s,\tau)$ обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $A_{ms}(\tau)$. Условие периодичности $y_{jm}$ приводят к уравнениям для $A_{ms}$ в стандартной форме [5]:

$$\frac{dA_{ms}}{d\tau}=\mu[A_{ms}B_s(\lambda_s)+A_{ms}\,|A_{ms}|^{-1}\,C_{ms}(A_{ms})], \quad (7)$$

здесь $B_s$, $C_{ms}$ – функции указанных в (7) аргументов.

Пусть в резонансном (критическом) случае среди корней фундаментального уравнения есть критические $\lambda_s$ ($s=1,\dots,p$), удовлетворяющие соотношениям(5) и следующему равенству [4]:

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\alpha_\sigma=\sum_{s=1}^{q}m_s^{(\sigma)}\lambda_s+\sum_{s=1}^{q}n_s\omega_s \quad \sigma=1,\dots,n, \quad (8)$$

где $m_s$, $n_s$ – целые положительные или отрицательные числа из (5). В отличие от нерезонансного случая [5], гармоники критических частот $\lambda_s$ не разделяются. Однако $y_{jm}$ должны опосредованно удовлетворять (7) и зависят поэтому от $p$ переменных $A_{ms}$. Воспользуемся приемом сокращения числа неизвестных при построении решений в критическом случае. Введем для этого $n$ функций [4]:

$$\chi_r=\sum_{s=1}^{p}m_s^{(r)}\varphi_{1s}, \quad r=1,\dots,n, \quad (9)$$

здесь $m_s^{(r)}$ – числа из (5). Запишем также $p$ других функций как сумму фаз

$$\vartheta_s=\varphi_{1s}+\varphi_{2s}, \quad s=1,\dots,p. \quad (10)$$

Сопоставление (9) и (10) показывает, что функции $\chi_r$ и $\vartheta_s$ – линейно независимы, а фазы $\psi_r$ аргументов экспонент из (7) в силу (8) равны

$$\psi_r=\sum_{\sigma=1}^{n}\alpha_\sigma\sum_{s=1}^{p}m_s^{(r)}\varphi_{ks}i^{2mk}, \quad k=1,2. \quad (11)$$

Выражение фазы $\varphi_{ks}$ из (11) через (10) обнаруживает, что $\psi_r$ есть линейная комбинация $\chi_r$ и $\vartheta_s$:

$$\psi_n=\sum_{\sigma=1}^{n}\alpha_\sigma\left[\chi_r-0.5\sum_{s=1}^{p}(1+i^{2r})m_s^{(r)}\vartheta_s\right]. \quad (12)$$

Применение (12) в сочетании с условиями периодичности $y_{jm}$ позволяет получить в резонансном случае систему уравнений в стандартной форме для $A_{ms}=c_{ms}\exp i\varphi_{ms}$:

$$\frac{dA_{ms}}{dt}=\mu[A_{ms}L_s(\lambda_s)+A_{ms}\,|A_{ms}|^{-1}M_{ms}(A_{m1}\ldots A_{mp})], \\ m=1,2; \quad s=1,\dots,p, \quad (13)$$

где $L_m$ и $M_{ms}$ – функции указанных в (13) аргументов, аналогичных полученным в нерезонансном случае при тех же свойствах. Система позволяет перейти к двум группам уравнений, структура которых использует для резонансной ситуации функции $c_{ms}(\tau)$, $\varphi_{ms}(\tau)$, комплексные функции $M_{ms}=M_{ms}^r+iM_{ms}^i$, с применением порознь вещественной и мнимой частей, а также $\chi_r(t,\tau)$, введенную как (9). Указанные группы уравнений позволяют получить нужную форму нулевого приближения фазы

$$\varphi_{ms}^0(t,\tau)=\mu(c_{ms}^0)^{-1}[M_{ms}^i(c_{1s}^0,c_{2s}^0,\chi_r^0,\theta_s^0)]t+\varepsilon_{ms}^0= \\ =\mu\delta_{ms}^0 t+\varepsilon_{ms}^0. \quad (14)$$

При $\gamma$ ($s=1,\dots,\gamma$) критических частот в (5), которым отвечают поправки (14), нулевое приближение $u_{js}^0$ для этих частот будет

$$u_{js}^0(x,t,\tau)=2c_{1s}^0\cos(\lambda_s t+\varepsilon_{1s}^0),$$
$$u_{js}^0(x,t,\tau)=2c_{2s}^0\sin(\lambda_s t+\varepsilon_{2s}^0), \quad s=1,\dots,\gamma. \quad (15)$$

Система (13) в сочетании с указанными двумя группами уравнений позволяет определить для резонансного случая нулевое приближение амплитуды $A^0_{ms}(\tau)$. .

Завершение построения почти периодического решения (3) связано с нахождением функции $z_j(x,t,\tau)$. Пусть соотношения (5) первоначально задают $h$ аргументов разложения правых частей в ряды Фурье, равные частотам $\lambda_s$. Тогда в силу взаимосопряженности коэффициентов Фурье у $\exp[\pm i(\lambda_s t+\psi_s)]$ почти периодическую $z_j$ из (6) можно записать как

$$z_j(x,t,\tau)=z_{j0}(x)+2\sum_{h+1}^{r}\{\cos[\gamma_r t+\psi_r(\tau)]z_{j1r}(x)-$$
$$-\sin[\gamma_r t+\psi_r(\tau)]\}z_{j2r}(x), \qquad (16)$$

где $\gamma_r \neq \lambda_s$ для членов с $r > h$ и функции $z_{jmr}(x)$ определяются из уравнений для $y_{jm}$, а $h$ – число первоначально заданных аргументов рядов Фурье с частотами, равными $\lambda_s$.

После построения (16) искомые почти периодические функции $u_j(x, t)$ определяют автоколебания исследуемого ротора в резонансном случае. Их выражения даются в виде:

$$u_1(x,t)=2\sum_{s=1}^{n}\{c^0_{1s}\cos[(\lambda_s+\mu\delta^0_{1s})t+\varepsilon^0_{1s}]+\mu c^{(1)}_{1s}\times$$
$$\times\cos[(\lambda_s+\mu\delta^{(1)}_{1s})t+\varepsilon^{(1)}_{1s}]+\ldots\}Y_{1s}(x)+\mu Z_1(x,t,\mu)+\ldots$$

$$u_2(x,t)=2\sum_{s=1}^{n}\{c^0_{2s}\sin[(\lambda_s+\mu\delta^0_{2s})t+\varepsilon^0_{2s}]+\mu c^{(1)}_{2s}\times$$
$$\times\sin[(\lambda_s+\mu\delta^{(1)}_{2s})t+\varepsilon^{(1)}_{2s}]+\ldots\}Y_{2s}(x)+\mu Z_2(x,t,\mu)+\ldots$$

где

$$Z_j(x,t,\mu)=2\sum_{s=1}^{n}\{\cos[(\lambda_s+\mu\delta^0_{js})t+\varepsilon^0_{js}]\Psi_{j1s}(x)-$$
$$-\sin[(\lambda_s+\mu\delta^0_{js})t+\varepsilon^0_{js}]\Psi_{j2s}(x)\}+z_j(x,t,\tau),$$

$Y_{js}(x)$ – собственные формы линейной гиромодели; $\psi_{jms}(x)$ – функции, ортогональные $Y_{js}(x)$; $c^0_{js}(\tau)$ – стационарные амплитуды автоколебаний; $\delta^0_{js}$ – поправки нулевого приближения к частотам $\lambda_s$; $\varepsilon^0_{js}(\tau)$ – стационарные фазы автоколебаний.

*Список литературы*

1. Кушуль М.Я. // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 1. С. 115–126.

2. Блехман И.И. // МТТ. 1976. № 6. С. 13–27.

3. Гордон Е.Я. // Машиноведение. 1972. № 3. С. 18–24.

4. Кушуль М.Я. Автоколебания роторов. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 167 с.

5. Banakh L.Ya., Zeytman M.F. // Proceedings of the 8th IFToMM International conference on rotor dynamics, Seoul: Publishing office of KIST, 2010. V. 1. P. 1016–1021.

## THE RESONANT REGIME OF SELF-EXCITED OSCILLATIONS IN THE INSTABILITY FIELDS OF FLEXIBLE GYROSCOPIC ROTORS

***M.F. Zeytman***

The various self-excited oscillation regimes of flexible gyroscopic rotors are considered. The movement of the analyzed structures is described by quasi-linear non-uniform differential equations in partial derivatives. Vibrations in the instability fields of their bending vibrations have a quasi-periodic self-excited character. The method of direct division of displacements and a procedure for constructing equations of motion for quasi-periodic solutions are proposed. Two self-excited oscillation regimes are possible: non-resonant and resonant (critical). Most attention is paid to the resonant case, for which stationary equations satisfying the sought self-excited vibrations are derived.

*Keywords:* flexible gyroscopic rotor, rotor self-excited oscillations, quasi-periodic solution, instability fields.