

УДК 539.3

ТЕОРИЯ ДИСЛОКАЦИЙ И ДИСКЛИНАЦИЙ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ

© 2011 г.

Л.М. Зубов

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

zubovl@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

На основе классической модели Кирхгофа–Лява рассматривается напряженное состояние упругой тонкой оболочки, содержащей как изолированные, так и непрерывно распределенные дислокации и дисклинации. Установлены вариационные принципы и представлены общие теоремы линейной теории оболочек с дислокациями и дисклинациями. Сформулирована проблема бесконечно малых изгибов поверхности при наличии распределенных дислокаций. Построена нелинейная теория оболочек с непрерывно распределенными дислокациями. В линейной и нелинейной постановках решен ряд задач о сосредоточенных дефектах в замкнутой сферической оболочке.

Ключевые слова: модель Кирхгофа–Лява, оболочка, малые изгибания, большие деформации, дислокации, дисклинации.

На основе классической теории Кирхгофа–Лява рассматривается задача о напряженном состоянии тонкой упругой оболочки, содержащей дислокации и дисклинации. Дана постановка задачи о равновесии многосвязной оболочки с дислокациями Вольтерра, характеристики которых заданы. Путем предельного перехода от дискретного набора изолированных дефектов к их непрерывному распределению построена линейная теория оболочек с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями. Введены векторные плотности дислокаций и дисклинаций в упругих оболочках. Сформулированы вариационные принципы и общие теоремы теории оболочек с дислокациями и дисклинациями. Найдены ограничения на плотности распределенных дефектов в замкнутых оболочках, необходимые для разрешимости задачи равновесия. Установлен принцип двойственности теории оболочек, состоящий в математической эквивалентности краевой задачи о напряженном состоянии оболочки, обусловленном непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями, и краевой задачи о равновесии оболочки под действием заданных распределенных нагрузок. Плотности дислокаций и дисклинаций, как и плотности внешних нагрузок, можно считать обобщенными функциями. Это позволяет рассматривать случай распределенных дефектов. Отсюда следует, что двойственность краевых задач равновесия оболочки справедлива и для сосредоточенных дислокаций и дисклинаций. Например, задача о сосредоточенной дисклинации, расположенной в некоторой точке обо-

лочки с границей, свободной от внешних нагрузок, математически тождественна задаче о деформации оболочки из сопряженного материала с заземленной границей под действием сосредоточенной силы, приложенной в той же точке. Для изотропной оболочки переход к сопряженному материалу состоит в замене коэффициента Пуассона на противоположное число.

Решен ряд задач о сосредоточенных дефектах в замкнутой сферической оболочке. Сформулирована проблема бесконечно малых изгибов поверхности при наличии распределенных дислокаций. Решена задача об изгибаниях замкнутой сферы с непрерывно распределенными дислокациями. Найдено нетривиальное гладкое поле поворотов элементарных площадок сферы с дислокациями при ее изометрической деформации.

В условиях больших деформаций, т.е. в рамках общей нелинейной теории оболочек, в силу принципиальных трудностей, обусловленных некоммутативностью конечных поворотов, не удастся корректным образом ввести плотность распределенных дисклинаций. В нелинейном случае оказалось возможным построение модели оболочек с непрерывно распределенными трансляционными дислокациями и сосредоточенными дисклинациями. Получена компактная бескоординатная форма нелинейных уравнений несовместности, содержащих плотность дислокаций. Установлено, что нелинейная теория оболочек Кирхгофа–Лява, в отличие от линейной теории, допускает непрерывное распределение винтовых дислокаций в оболочке. На основе развитой нелинейной

модели решены задачи о деформации безмоментной замкнутой сферической оболочки с распределенными дислокациями и с дисклинациями, сосредоточенными в полюсах сферы.

Дислокации и дисклинации играют существенную роль в механическом поведении двумерных физических и биологических систем, таких

как тонкопленочные наноматериалы, поверхностные кристаллы, фуллерены, клеточные мембраны, сферические вирусы и др.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-01-00459, и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы.

DISLOCATIONS AND DISCLINATIONS ELASTIC SHELL THEORY

M.L. Zubov

On the basis of classical Kirchhoff–Love model the stressed state of an elastic thin shell containing both isolated and continuously distributed dislocations and disclinations under large deformations is considered. The variational principles and general theorems of the linear shell theory with dislocations and disclinations are obtained. The problem of surface infinitesimal bending with distributed dislocations is formulated. The nonlinear shell theory with continuously distributed dislocations is constructed. A number of problems about concentrated defects in a closed spherical shell in linear and nonlinear formulations is solved.

Keywords: Kirchhoff–Love model, shell, infinitesimal bending, large deformations, dislocations, disclinations.