УДК 51-72:531

О МЕТОДЕ РАУСА – ЛЯПУНОВА

В.Д. Иртегов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

irteg@icc.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Предложено несколько новых алгоритмов качественного исследования консервативных систем, позволяющих выделять и анализировать инвариантные многообразия дифференциальных уравнений задачи. Эффективность этих алгоритмов продемонстрирована на примерах анализа ряда конкретных задач механики.

Ключевые слова: инвариантные многообразия, метод Рауса – Ляпунова.

Алгоритмы и задачи

Идея экстремальности, как один из подходов описания и анализа многих естественнонаучных задач, остается востребованной и в настоящее время. В механике это вариационные принципы механики, теорема Лагранжа об устойчивости равновесия и ее обращение, метод Рауса – Ляпунова и т.п.

Приведен ряд результатов, напрямую связанных с исследованиями консервативных систем, а именно, указано несколько алгоритмов, которые позволяют существенно расширить возможности методики Рауса – Ляпунова при качественном исследовании механических систем, в частности систем с первыми интегралами. Так, при обсуждаемом подходе эффективными оказываются, например, следующие процедуры:

1. Анализ случаев вырождения условий стационарности связки первых интегралов задачи.
2. Использование огибающей для связки первых интегралов при анализе особенностей стационарных множеств.
3. Решение уравнений стационарности связки первых интегралов относительно части переменных и части параметров.
4. Использование резонансных соотношений между первыми интегралами для выделения инвариантных множеств уравнений движения.
5. Использование «расширенных» характеристических функций для качественного анализа системы.
6. Выделение стационарных множеств на уже выделенных инвариантных многообразиях консервативной системы.

С помощью указанных алгоритмов проведен качественный анализ ряда классических задач. Например, для уравнений движения волчка Лагранжа в центральном поле сил (тиссерановское приближение) с помощью построения огибающего первого интеграла приведен пример глобальной бифуркации трех особых семейств регулярных прецессий [1]. С помощью решения системы уравнений стационарности связки первых интегралов получены и исследованы новые семейства инвариантных многообразий в задаче о движении тела в жидкости [2]. Анализ резонансных соотношений для первых интегралов уравнений движения позволил выделить новые инвариантные многообразия в некоторых интегрируемых задачах твердого тела и для уравнений Эйлера на алгебрах Ли [3].

Для систем с циклическими первыми интегралами с использованием «расширенной» функции Рауса для ряда задач механики проведено выделение инвариантных многообразий, доставляющих стационарное значение этой «расширенной» функции Рауса.

Задача Кеплера

Примером одной из простых систем, при анализе которой может быть использован подход с «расширенной» функцией Рауса, является плоская задача Кеплера. Функция Лагранжа здесь имеет вид:

$$2L = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + 2\mu\rho^{-1}.$$

Ей соответствует циклический первый интеграл

$$\partial L/\partial\dot\varphi = \rho^2\dot\varphi^2 = c, \quad c = \text{const}.$$

После преобразования Лежандра лагранжиану сопоставляется следующая функция Рауса:

$$2R = \dot\rho^2 + 2\mu\rho^{-1} - c^2\rho^{-2}.$$

Построим «расширенную» функцию Рауса

$$\widetilde{R} = R + f(\rho)\dot\rho$$

и запишем условия стационарности для $\widetilde{R}$:

$$\partial\widetilde{R}/\partial\dot{\rho} = \dot{\rho} + f(\rho) = 0,$$

$$\partial\widetilde{R}/\partial\rho = -\mu\rho^{-2} + c^2\rho^{-3} + f'(\rho)\dot{\rho} = 0.$$

Потребуем, чтобы эти уравнения были зависимы. Для этого должно выполняться условие

$$-\mu\rho^{-2} + c^2\rho^{-3} - f'(\rho)f(\rho) = 0.$$

Интегрируя последнее выражение, получим два семейства значений $f(\rho)$:

$$2f(\rho)^2 = 2\mu\rho^{-1} - c^2\rho^{-2} + D, \quad D = \mathrm{const},$$

при которых, как легко проверить, уравнение

$$\sqrt{2}\dot{\rho} = \pm(2\mu\rho^{-1} - c^2\rho^{-2} + D)^{1/2}$$

будет определять два семейства инвариантных многообразий (ИМ) для соответствующего R и $\widetilde{R}$ дифференциального уравнения.

Если добавить к последнему уравнению циклический интеграл, то получим уравнения двух семейств ИМ для дифференциальных уравнений исходной задачи Лагранжа:

$$\sqrt{2}\dot{\rho} = \pm(2\mu\rho^{-1} - c^2\rho^{-2} + D)^{1/2},$$

$$\partial L/\partial\dot{\varphi} = \rho^2\dot{\varphi}^2 = c, \quad c = \mathrm{const}.$$

Последнее также проверяется по определению.

Умножив первое условие стационарности $\widetilde{R}$ на $\dot{\rho}$ и сопоставляя получившееся равенство с $\widetilde{R}$, после очевидных преобразований получим:

$$2\widetilde{T}dt = f(\rho)d\rho = dg(\rho) \quad (g'(\rho) = f(\rho)).$$

Интегрируя последнее выражение, будем иметь:

$$J = \int_{t_0}^{t} 2\widetilde{T}dt = \int_{\rho_0}^{\rho} dg(\rho) = g(\rho) - g(\rho_0).$$

Таким образом, с точностью до произвольной постоянной $g(\rho_0)$ функция $g(\rho)$ равна действию в вариационном принципе стационарного действия, подсчитанному на множестве, определяемом условием стационарности $\widetilde{R}$ по скорости $\dot{\rho}$.

Обратим внимание на то, что в терминологии, принятой в [4], полученные выше уравнения двух семейств ИМ можно считать полями, соответствующими уравнениям Рауса рассматриваемой задачи, а дифференциальное уравнение для $f(\rho) = g'(\rho)$, полученное как требование вырожденности системы условий стационарности «расширенной» функции Рауса, является системой Гамильтона – Якоби при $n = 1$ (случай одной степени свободы). Следовательно, $f(\rho) = g'(\rho)$ является решением уравнения Гамильтона – Якоби, соответствующего системе Гамильтона – Якоби. В рассматриваемой задаче получение такого уравнения из системы свелось к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Заметим, наконец, что возведенное в квадрат уравнение ИМ в рассматриваемой задаче

$$2\dot{\rho}^2 = 2\mu\rho^{-1} - c^2\rho^{-2} + D$$

совпадает с уравнением, к которому приводится наша задача при стандартном методе интегрирования.

Список литературы

1. Иртегов В.Д. // Изв. вузов. Математика. 2010. №8. С. 42–50.
2. Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. // ПММ. 2010. Т. 73. Вып. 4. С. 531–537.
3. Иртегов В.Д. // Тр. IX Междунар. Четаевской конф. Иркутск. 2007. Т. 2. С. 86–100.
4. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961. 228 с.

ON ROUTH – LYAPUNOV METHOD

V.D. Irtegov

Several new algorithms for qualitatively analyzing conservative systems are proposed. These algorithms allow one to obtain and to investigate invariant manifolds of differential equations of the problems. The efficiency of the algorithms is demonstrated by examples of analyzing particular mechanical problems.

Keywords: invariant manifolds, Routh – Lyapunov method.