УДК 539.3

О ТЕОРИИ ТОНКИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ С ДВУМЯ МАЛЫМИ РАЗМЕРАМИ

М.М. Кантор, М.У. Никабадзе

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

maslishe@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

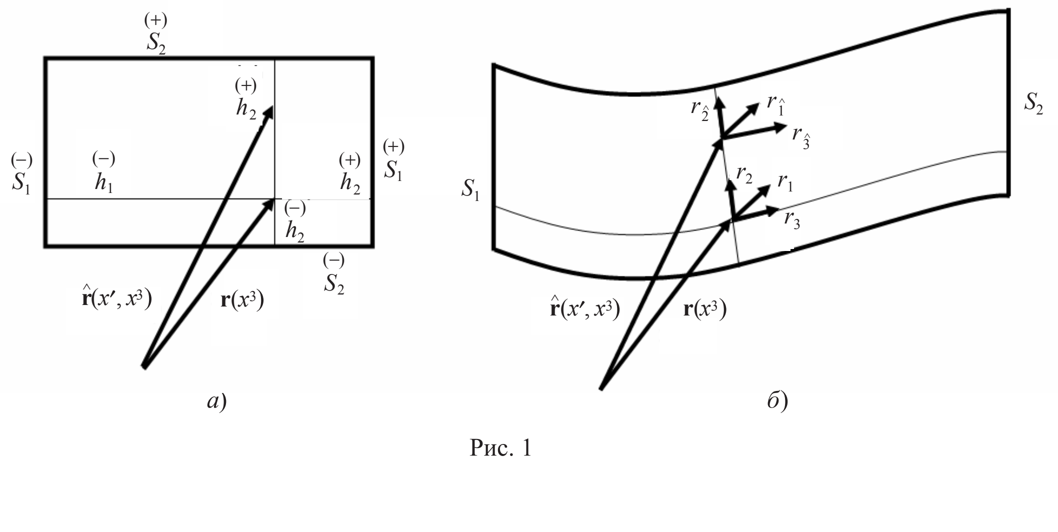
Предлагается вариант теории тонких микрополярных тел с двумя малыми размерами. На примере прямоугольной полосы делается сравнение решений, которые получены с использованием предлагаемой теории, с решениями методом конечных элементов и решениями уравнения Бернулли–Эйлера. Проводится сравнение решений по классической теории упругости с решениями по микрополярной теории.

Ключевые слова: теория тонких тел, микрополярная теория.

Общие результаты

Рассматривается тонкое тело с двумя малыми размерами с прямоугольными поперечными сечениями (рис. 1). Для исследования данного объекта используется трехмерный подход. На рис. 1*а* изображено поперечное сечение исследуемого тела; $\overset{(+)}{h}_1$, $\overset{(-)}{h}_1$, $\overset{(\ )}{h}_2$, $\overset{(-)}{h}_2$ – геометрические размеры сечения; $\overset{(+)}{S}_1$, $\overset{(-)}{S}_1$, $\overset{(+)}{S}_2$, $\overset{(-)}{S}_2$ – лицевые поверхности. На рис. 1*б* сечение тонкого тела изображено вдоль базовой линии $\mathbf{r}(x_3)$. Базовой линией будем называть произвольную гладкую пространственную кривую; $\hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$ – радиус-вектор произвольной точки, $x' = (x^1, x^2)$ – поперечные координаты, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ и $(\mathbf{r}_{\hat{1}}, \mathbf{r}_{\hat{2}}, \mathbf{r}_{\hat{3}})$ – ковариантные базисы на базовой линии и в произвольной точке тонкого тела соответственно; S_1 и S_2 – торцы тела.

Предлагается вариант параметризации области тонкого тела, когда в качестве базовой выбирается произвольная линия. Получены все необходимые тензорные характеристики, а также представления некоторых дифференциальных операторов при используемой параметризации. Дана постановка задачи для тонкого микрополярного [1, 2] тела с двумя малыми размерами, в которую входят уравнения равновесия относительно напряжений и моментных напряжений, граничные условия на лицевых поверхностях, граничные условия на торцах, определяющие соотношения линейной микрополярной теории, которые представлены при данной параметризации. Все искомые величины раскладываются в ряд по полиномам Лежандра [3], затем определяется момент порядка (m, n) относительно полиномов Лежандра и ставится задача в моментах приближения (s, M, N) [4]. В нее входят уравнения равновесия, граничные условия на лицевых поверхностях и



а) *б*)

Рис. 1

торцах, а также определяющие соотношения в моментах. Уравнения равновесия в моментах представляют собой систему из $6(M+1)(N+1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Если подставить в них определяющие соотношения в моментах соответствующего приближения, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в моментах перемещений и вращений, которая содержит $6(M+1)(N+1)$ уравнений относительно $6(M+1)(N+1)$ неизвестных.

Задача о прямоугольной микрополярной полосе

Рассматриваемая прямоугольная полоса изображена на рис. 2 и представляет собой двухмерное тело с одним малым размером. На торцах ставится условие равенства нулю перемещений и вращений. Сверху действует постоянная распределенная нагрузка интенсивности P_1.

Для решения задачи использовалась методика, описанная выше, т.е. при помощи разложений по полиномам Лежандра двухмерная задача сводилась к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Были проведены сравнения полученных решений с решением методом конечных элементов и решением Бернулли–Эйлера. На рис. 3 изображены прогибы средней линии, полученные различными методами и при различных толщинах полосы. Также решения по классической теории упругости сравнивались с решениями по микрополярной теории. На рис. 4 показаны прогибы средней линии для микрополярной и классической теорий на примере полиуретановой пленки, материальные константы которой, в том числе моментные, приводятся в [5].

Список литературы

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories 1. Foundation and Solids. NY: Springer. 1998.
3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976.
4. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.
5. Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua, Continuum models for materials with micro-structure / Ed. H. Muhlhaus. NY: J. Wiley, 1995. Ch. 1. P. 1–22.

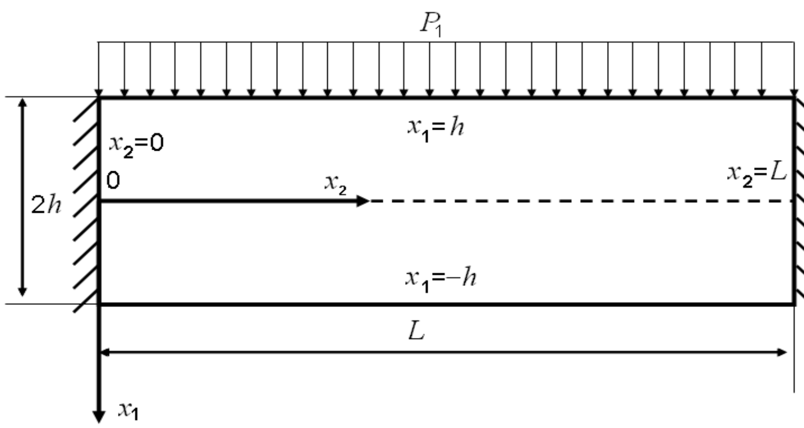


Рис. 2

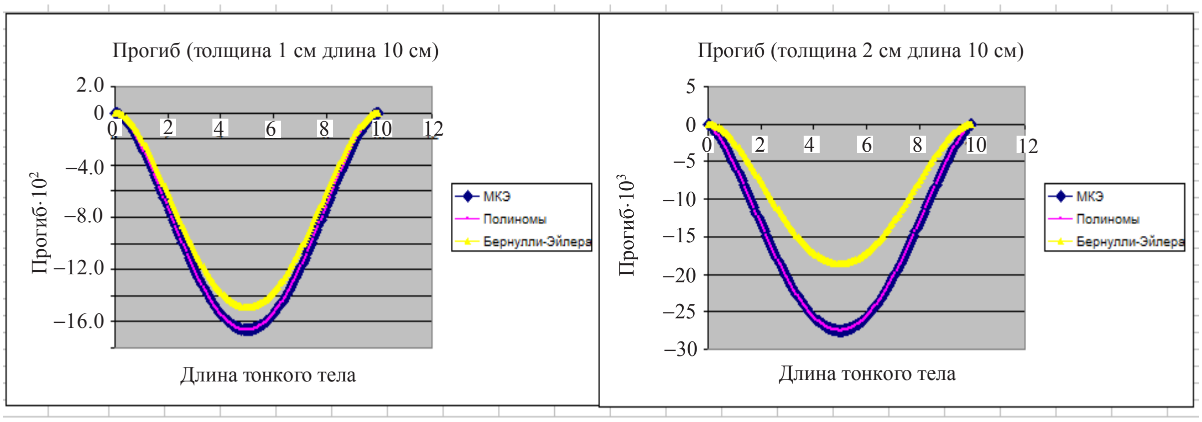


Рис. 3

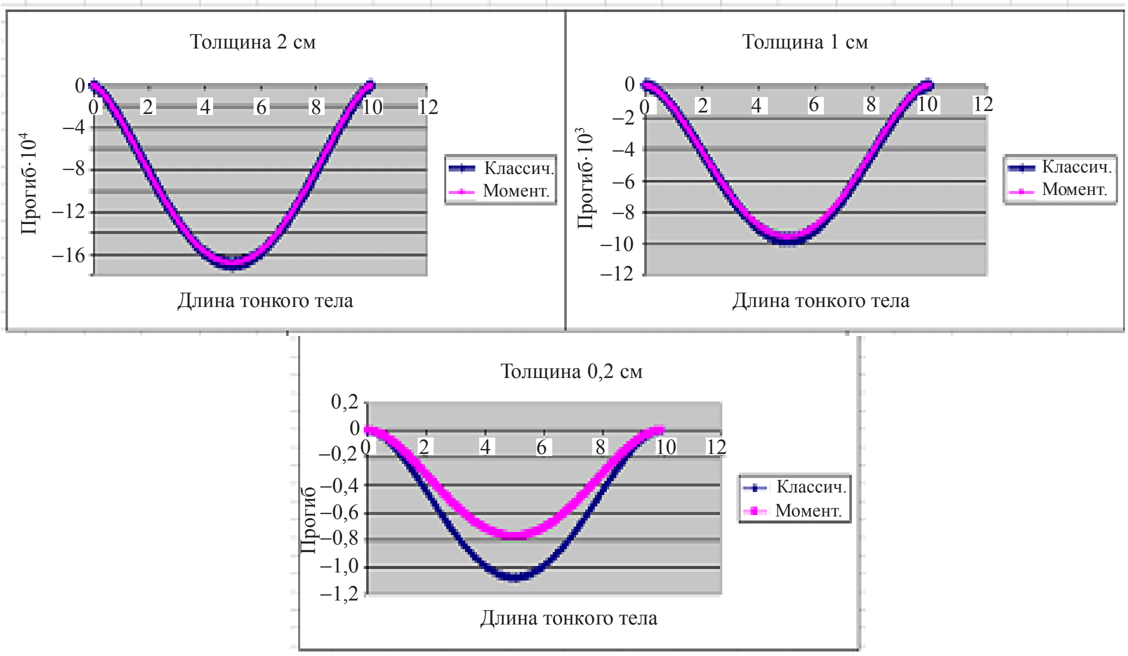


Рис. 4

ON THE THEORY OF THIN MICROPOLAR SOLIDS WITH TWO SMALL DIMENSIONS

M.M. Kantor, M.U. Nikabadze

A version of the theory of thin micropolar solids with two small dimensions is introduced. Using the example of a rectangular two-dimensional region, comparison between the solutions using the present theory, finite element method solutions and Bernoulli – Euler solutions is made. Solutions of the classical elasticity theory and micropolar elasticity theory are also compared.

Keywords: theory of thin solids, micropolar theory.