Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2224–2226

УДК 532.5

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

П.Е. Карабут, В.В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

ostapenko_vv@ngs.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Для гиперболических систем законов сохранения предложен метод последовательных приближений решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды. В качестве примера проведен анализ качественно различных режимов течения, возникающих при решении задачи о разрушении плотины в двухслойной мелкой воде со свободной границей.

Ключевые слова: гиперболическая система законов сохранения, двухслойная мелкая вода, распад разрыва.

Введение

Задача о распаде разрыва для гиперболических систем законов сохранения [1–4] – одна из наиболее распространенных задач при получении и качественном анализе автомодельных обобщенных решений, на которых тестируются разнообразные численные методы. Однако однозначная разрешимость этой задачи для начального разрыва произвольной амплитуды доказана для достаточно узкого класса гиперболических систем, таких как системы законов сохранения газовой динамики [2] или первого приближения теории однослойной мелкой воды [4]. В [1, 3] однозначная разрешимость задачи о распаде разрыва доказана для начального разрыва достаточно малой амплитуды. Основной недостаток этой теоремы заключается в том, что она не дает явного алгоритма для построения соответствующего автомодельного решения.

Предлагается метод последовательных приближений для построения решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды. В линейном приближении этого метода получается задачи Коши для линейной гиперболической системы. Ее решения представляют собой линии разрыва, разделенные областями, в которых решение является постоянным. Основное внимание уделяется первому и второму приближениям этого метода, в рамках которых разрывы, получаемые в линейном приближении, разделяются на устойчивые ударные волны и волны разрежения. В качестве конкретного примера проведен анализ качественно различных режимов течения, возникающих при решении задачи о разрушении плотины для модели двухслойной мелкой воды со свободной границей [5].

Первое приближение

Рассмотрим задачу о распаде разрыва малой амплитуды для квазилинейной гиперболической системы законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = \{\mathbf{u}^l,\, x<0;\, \mathbf{u}^r,\, x>0\},$$
$$|\,\mathbf{u}^l - \mathbf{u}^r| = 2\varepsilon \le 1; \quad \mathbf{u}^l, \mathbf{u}^r = \mathrm{const}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}(t,x)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ – вектор-функции, зависящие от n компонент. Линейное приближение решения задачи (1) по параметру ε имеет вид

$$\mathbf{u}_1(t,x) = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1(t,x),$$

где $\mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}^l - \mathbf{u}^r)/2$ – начальное приближение, $\mathbf{v}_1$ – решение следующей задачи о распаде разрыва для линейной системы:

$$(\mathbf{v}_1)_t + A_0(\mathbf{v}_1)_x = 0,$$
$$A_0 = \mathbf{f}_\mathbf{u}(\mathbf{u}_0), \quad \mathbf{v}_1(0,x) = \{\mathbf{e},\, x<0,\, -\mathbf{e},\, x>0\}, \quad (2)$$
$$\mathbf{e} = (\mathbf{u}^l - \mathbf{u}^r)/2\varepsilon.$$

Решение задачи (2) выписывается в явном виде [2, 4] и представляет собой n сильных разрывов, распространяющихся вдоль лучей

$$x = \lambda_i^0 t, \quad i = \overline{1,n},$$

разделенных областями постоянных решений $\mathbf{v}_1^k$, $k = \overline{0,n}$, где $\lambda_i^0 = \lambda_i(\mathbf{u}_0)$, $\lambda_i(\mathbf{u})$ – собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{f}_\mathbf{u}$ системы (1), пронумерованные в порядке возрастания. В статье [6] построены и проанализированы все качественно различные решения линейного приближения (2) задачи о разрушении плотины в двухслойной мелкой воде.

Обозначим через $\mathbf{u}^k$ значение решения задачи (1) в области его постоянства между волнами индексов k и $k+1$, а через $[f(\mathbf{u})]_k = f(\mathbf{u}^{k-1}) - f(\mathbf{u}^k)$ – скачок функции $f(\mathbf{u})$ при переходе через линию разрыва индекса k. Пусть имеют место разложения

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1^k + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2^k + O(\varepsilon^3).$$

Используя их, получим

$$[\lambda_k(\mathbf{u})]_k = \varepsilon \mathbf{F}_1^k + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2^k + O(\varepsilon^3),$$

где

$$F_1^k = \nabla\lambda_k^0 [\mathbf{v}_1]_k = \nabla\lambda_k^0 \mathbf{r}_0^k [w_k]_k,$$

$w_k = \mathbf{l}_0^k \mathbf{v}_1$ – k-й инвариант системы (2), $\mathbf{r}_0^k = \mathbf{r}^k(\mathbf{u}_0)$, $\mathbf{l}_0^k = \mathbf{l}^k(\mathbf{u}_0)$, $\mathbf{r}^k(\mathbf{u})$ и $\mathbf{l}^k(\mathbf{u})$ – правый и левый собственные векторы матрицы $\mathbf{f}_\mathbf{u}$, отвечающие собственному значению $\lambda_л(\mathbf{u})$,

$$F_2^k = \nabla\lambda_k^0 [\mathbf{v}_2]_k + [\mathbf{v}_1 \nabla^2 \lambda_k^0 \mathbf{v}_1]_k / 2.$$

Из характеристического критерия устойчивости разрывов [1] следует, что при $F_1^k > 0$ ($F_1^k < 0$) разрыв индекса k линейной системы (2) представляет собой ударную волну (волну разрежения) квазилинейной системы (1). Если $F_1^k = 0$, то этот разрыв в первом приближении по параметру ε является контактным при $[w_k]_k \neq 0$ и вырожденным при $[w_k]_k = 0$. В [7] этим способом была проведена классификация разрывов в задаче о разрушении плотины в двухслойной мелкой воде со свободной границей. Было показано, что если разрыв индекса k в первом приближении представляет собой прерывную волну, то симметричный ему разрыв индекса $5-k$ – волну понижения. Были получены условия на параметры задачи, при которых внутренние разрывы индексов 2 и 3 в первом приближении являются контактными.

Второе приближение

Обозначим через A_1 множество индексов линий разрывов $x = \lambda_i^0 t$, для которых выполнено неравенство $F_1^k > 0$, через A_2 – неравенство $F_1^k < 0$, через A_3 – условия $F_1^k = 0$, $[w_k]_k \neq 0$, и через A_4 – равенство $[w_k]_k = 0$. Линия разрыва индекса $k \in A_1$ в первом приближении переходит в ударную волну задачи (1). Будем предполагать, что для скоростей D^k этих ударных волн имеет место разложение

$$D^k = D_1^k + \varepsilon D_1^k + O(\varepsilon^2).$$

Тогда из условий Гюгонио

$$D^k [\mathbf{u}]_k = [\mathbf{f}(\mathbf{u})]_k$$

для системы (1) во втором приближении по параметру ε получим

$$[\mathbf{v}_1]_k D_2^k + (A_0 - \lambda_k^0 E)(\mathbf{v}_2^k - \mathbf{v}_1^k) = [\mathbf{v}_1 B_0 \mathbf{v}_1]_k,$$
$$B_0 = \mathbf{f}_{\mathbf{uu}}(\mathbf{u}_0), \quad k \in A_1. \qquad (3)$$

Из условия постоянства в центрированной волне понижения ($k \in A_2$) при переходе через контактный ($k \in A_3$) и вырожденный ($k \in A_4$) разрывы соответствующих наборов из $(n-1)$-го независимых первых интегралов во втором приближении получим

$$\mathbf{l}_0^i(\mathbf{v}_2^k - \mathbf{v}_2^{k-1}) = [\mathbf{v}_1 S_0^i \mathbf{v}_1]_k, \quad S_0^i = \mathbf{l}_\mathbf{u}^i(\mathbf{u}_0),$$
$$i = \overline{1, k-1}, \overline{k+1, n}, \quad k \in A_2 \cup A_3 \cup A_4. \qquad (4)$$

Соотношения (3), (4) образуют замкнутую линейную систему из $(n-1)+[A_1]$ скалярных уравнений, где $[A_1]$ – количество элементов в множестве A_1 для нахождения скалярных D_1^k ($k \in A_1$) и векторных $\mathbf{v}_2^k$ ($k = \overline{1, n}$) параметров второго приближения. После решения системы (3), (4), с учетом знака функции F_2^k контактные и вырожденные разрывы, возникшие в первом приближении, разделяются на ударные волны, волны разрежения, контактные и вырожденные разрывы второго приближения. Построение следующих приближений по параметру проводится аналогичным образом. Построение разложений в центрированных волнах разрежения проводится независимо от внешнего разложения на основе формул $\mathbf{u}_\xi = \mathbf{r}(\mathbf{u})$, $\xi = x/t = \lambda(\mathbf{u})$.

Список литературы

1. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1972.

2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

3. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

4. Остапенко В.В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды: Курс лекций. Новосибирск, 2004.

5. Овсянников Л.В. Модели двухслойной мелкой воды // ПМТФ. 1979. Т. 20, № 2. С. 3–13.

6. Карабут П.Е., Остапенко В.В. Задача о разрушении плотины в двухслойной мелкой воде (линейное приближение) // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 6. С. 958–970.

7. Карабут П.Е., Остапенко В.В. Метод последовательных приближений решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды // Докл. РАН. 2011. Т. 437, №1. С. 9–15.

METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATION FOR REAMANN PROBLEM OF SMALL AMPLITUDE DISCONTINUITY

P.E. Karabut, V.V. Ostapenko

The method of successive approximation for Reamann problem of small amplitude discontinuity is suggested for hyperbolic systems of conservation laws. As an example it is solved a dam break problem for two-layer shallow water with free upper boundary.

Keywords: hyperbolic system of conservation laws, two-layer shallow water, Reamann problem.