

УДК 531.36

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ДИССИПАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЕЙ

© 2011 г.

*А.В. Карапетыан*

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

avkarapetyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Предложен способ качественного анализа динамики диссипативных механических систем с симметрией, основанный на методе обобщенных диаграмм Смейла. Общие положения иллюстрируются на примере волчка «тип-топ».

*Ключевые слова:* диссипативные системы, симметрии, бифуркационные диаграммы, волчок «тип-топ».

Китайский волчок, или тип-топ, представляет собой динамически и геометрически симметричное тело, опирающееся о горизонтальную плоскость. Если китайский волчок быстро закрутить вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наименьшем расположении центра масс, то он перевернется на  $180^\circ$  и начнет вращаться вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наивысшем расположении центра масс.

Простейшей моделью китайского волчка может служить динамически симметричный неоднородный шар, центр масс которого лежит на оси динамической симметрии, но не совпадает с его геометрическим центром. Такая модель позволяет дать глобальный качественный анализ динамики волчка.

Рассмотрим тяжелый неоднородный динамически симметричный шар на горизонтальной плоскости. Пусть  $r$  – радиус шара,  $c$  – расстояние между его геометрическим центром  $O$  и центром масс  $S$ . Прямая  $SO$  предполагается главной центральной осью инерции шара – осью динамической симметрии; положительное направление этой оси определяется ее ортом  $\mathbf{e} = c^{-1}SO$ . Пусть  $A$  и  $C$  – экваториальный и осевой моменты инерции шара,  $m$  – масса,  $g$  – ускорение свободного падения. Введем следующие переменные:  $\mathbf{v}$  – скорость центра масс шара,  $\boldsymbol{\omega}$  – его угловая скорость,  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор восходящей вертикали. Скорость скольжения шара определяется соотношением  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ , где  $\mathbf{r} = c\mathbf{e} - r\boldsymbol{\gamma}$  – радиус-вектор точки контакта шара и опорной плоскости. На шар действуют сила тяжести  $\mathbf{P} = -mg\boldsymbol{\gamma}$ , нормальная реакция  $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\gamma}$ , сила трения  $\mathbf{F}$  и момент трения  $\mathbf{M}$ . В рамках модели трения, предложенной автором, сила и момент трения обла-

дают следующими свойствами (здесь  $\mu$  – малый параметр):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_\mu(N, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, \mu), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_\mu(N, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, \mu), \\ (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) &< 0 \text{ при } \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}: \mathbf{u}^2 + r^2\boldsymbol{\omega}^2 > 0, \\ \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}_0(N, \mathbf{u}), \quad (\mathbf{F}_0, \mathbf{u}) < 0 \text{ при } \mathbf{u} \neq 0, \\ \mathbf{F}_0(N, 0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_0 \equiv \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Полная механическая энергия системы – невозрастающая функция времени:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) \leq h, \\ \dot{H} &= (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) \leq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай  $\mu = 0$ . В этом случае система допускает первый интеграл (интеграл Джелетта)  $K = -r^{-1}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = k$ . Введем эффективный потенциал системы:

$$\begin{aligned} V_k &= \min_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}} H|_{K=k} = \\ &= -mgc(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) + \frac{1}{2} \frac{k^2}{(J(\boldsymbol{\gamma} - cr^{-1}\mathbf{e}), \boldsymbol{\gamma} - cr^{-1}\mathbf{e})}. \end{aligned}$$

Эффективный потенциал определен на сфере Пуассона  $S^2 = \{\boldsymbol{\gamma}: \boldsymbol{\gamma}^2 = 1\}$  и может быть представлен как функция лишь одной переменной  $x = (\mathbf{g}, \mathbf{e})$ . Критические точки  $x = \pm 1$  эффективного потенциала соответствуют равномерным вращениям шара вокруг вертикали с наименьшим ( $x = -1$ ) и наивысшим ( $x = +1$ ) расположением центра масс. Критические точки  $x_0 \in (-1, 1)$  соответствуют прецессионным движениям волчка. Множество всех стационарных движений волчка, соответствующих критическим точкам эффективного потенциала, можно представить в виде обобщенной диаграммы Смейла на плоскости  $(p^2, q)$  (здесь  $p^2 = k^2(Cmgc)^{-1} \in [0, +\infty)$ ,  $q = (h - mgc)(mgc)^{-1} \in (-\infty, \infty)$ ). Вид обобщенной диаграммы Смейла зависит от параметров систе-

мы  $a = A/C \in [1/2, +\infty]$ ,  $b = cr^{-1} \in (0, 1)$ . Наиболее типичный (для волчка тип-топ) случай представлен на рис. 1. При этом параметры системы удовлетворяют следующим условиям:

$$1 + b > a > (1 - b)(7 + b + \sqrt{1 + 14b + b^2})/8.$$

Кривые  $\Sigma_+$ ,  $\Sigma_0$  соответствуют равномерным вращениям и прецессионным движениям соответственно.

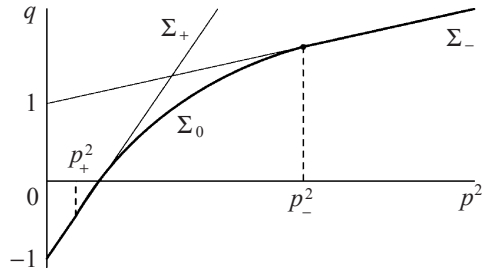


Рис. 1

Устойчивые движения выделены полужирными кривыми. Если волчок поставить в положение, близкое к положению устойчивого равновесия  $\gamma = e$ , и быстро ( $p^2 = p_0^2 > p_-^2 > p_+^2$ ) закрутить его вокруг оси симметрии, то на плоскости  $(p^2, q)$  таким начальным условиям будет соответствовать точка, лежащая в окрестности прямой  $\Sigma_+$  правее прямой  $p^2 > p_-^2$ . Если эта точка лежит ниже (выше) прямой  $\Sigma_+$ , то она начнет двигаться вдоль прямой  $p^2 = p_0^2$  в сторону уменьшения  $q$  и однозначно (с вероятностью единица) будет стремиться к точке  $p^2 = p_0^2$ , лежащей на прямой  $\Sigma_-$ , т.е. волчок перевернется на  $180^\circ$  и начнет устойчиво вращаться вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наивысшем расположении центра масс.

Рассмотрим теперь случай  $0 < \mu \leq 1$ , когда не существуют ни интеграл Джелетта, ни стационарные движения, но существуют квазистационарные движения, близкие к стационарным, указанным ранее. Таким образом, проведенный качествен-

ный анализ может быть рассмотрен как порождающий. Рассмотрим движение с теми же начальными условиями. Таким начальным условиям будет соответствовать точка плоскости  $(p^2, q)$ , лежащая в окрестности прямой  $\Sigma_+$  на вертикали  $p^2 = p_0^2$ . Под действием фазового потока системы эта точка начнет смещаться в сторону уменьшения  $q$  («быстро») и  $p^2$  («медленно»), пока не попадет на прямую  $\Sigma_-$  правее прямой  $p^2 = p_-^2$ . Затем изображающая точка «медленно» начнет смещаться вдоль прямой  $\Sigma_-$  вниз и влево. Достигнув (при  $p^2 = p_-^2$ ) точки бифуркации, в которой прямая  $\Sigma_-$  касается кривой  $\Sigma_0$ , изображающая точка начнет «медленно» двигаться вдоль кривой  $\Sigma_0$  влево и вниз. Достигнув второй точки бифуркации (при  $p^2 = p_+^2$ ), изображающая точка начнет «медленно» двигаться по прямой  $\Sigma_+$  вниз и влево, пока не достигнет точки  $(p^2 = 0, q = -1)$ .

Таким образом, китайский волчок на горизонтальной плоскости с трением скольжения и вращения, быстро закрученный вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наинизшем расположении центра масс, сначала «быстро» перевернется на  $180^\circ$  и некоторое время будет вращаться вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наивысшем расположении центра масс. За счет трения вращения угловая скорость волчка начнет уменьшаться и через некоторое время достигнет критического значения  $\omega_-$ . После этого волчок начнет совершать прецессионные движения; при этом угол отклонения его оси симметрии от вертикали начнет «медленно» возрастать от нуля (при  $p^2 = p_-^2$ ) до  $180^\circ$  (при  $p^2 = p_+^2$ ). После этого волчок начнет медленно вращаться в исходном положении с «медленно» убывающей до нуля угловой скоростью и в конце концов остановится в устойчивом положении равновесия.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00292, 09-08-00925).*

## QUALITATIVE ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF DISSIPATIVE SYSTEMS WITH SYMMETRY

*A.V. Karapetyan*

The method of qualitative analysis of the dynamics of dissipative mechanical systems with symmetry is proposed. The method based on the theory of the generalized Smale bifurcation diagrams. The problem of motion of the «tippe top» is considered as an example of the proposed method.

*Keywords:* dissipative systems, symmetries, bifurcation diagrams, «tippe-top».