УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО МАССЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

В.Г. Киселев[1], *О.А. Сергеев*[2], *С.А. Сергеева*[3]

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2]ООО «Экспресс Плюс», Нижний Новгород
[3]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

ppsoa@rol.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Вопросы, связанные с моделированием несовершенств, возникают, когда конструкция проектируется в первый раз и информации относительно начальных несовершенств не имеется. В большинстве работ, имеющих отношение к устойчивости конструкций, рассматриваются несовершенства, которые считаются известными в дискретных точках. Ставится задача нахождения самой худшей формы несовершенств, которая дает наибольшее снижение критической нагрузки потери устойчивости конструкции. Формулируются критерии для четырех типов критических точек – асимметричная особая точка бифуркации, симметричная особая точка бифуркации первого или второго типа, предельная точка. Учет начальных несовершенств в конструкции приводит к вырождению асимметричной и симметричной особых точек бифуркации в предельные точки. Метод оптимизации основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и специально сконструированных аппроксимациях для четырех типов критической нагрузки потери устойчивости конструкции с начальными несовершенствами.

Ключевые слова: оптимизация, анализ чувствительности, геометрически нелинейные стержневые конструкции, начальные глобальные несовершенства, критическая сила, общая потеря устойчивости, некратные предельные точки, некратные особые точки бифуркации.

Введение

Рассматривается геометрически нелинейная упругая конструкция. Считается априори, что для достаточно малых значений внешней консервативной нагрузки равновесие конструкции устойчиво. При дальнейшем нагружении у конструкции наступает критическое состояние, при котором касательная матрица жесткости становится особенной, что трактуется как общая потеря устойчивости. Приведены критерии для классификации особых состояний – некратные критические точки. Учет начальных несовершенств в конструкции приводит к вырождению особых асимметричной и симметричной точек бифуркации в предельные точки. Поэтому важными оказываются две задачи: мгновенное поведение конструкции после критической точки и изменение критической нагрузки потери устойчивости в зависимости от начальных глобальных несовершенств [1–3].

1. Постановка задачи оптимизации

Требуется определить такие значения управляемых параметров $\mathbf{X}^*$ из области допустимых значений F, для которых масса конструкции минимальна:

$$W(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X}\in F} W(\mathbf{X}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}$ – вектор управляемых параметров. Область допустимых значений F определяется следующими ограничениями:

– на критическую нагрузку потери устойчивости конструкции с начальными глобальными несовершенствами

$$\Lambda^{imp}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}^{наихудший})\mathbf{P}_0 \geq \Lambda^d \, \mathbf{P}_0, \qquad (2)$$

где Λ^{imp} – некратный критический множитель внешней консервативной нагрузки $\mathbf{P}_0$; Λ^d – рабочий уровень нагрузки $\mathbf{P}_0$; $\boldsymbol{\varepsilon}^{наихудший}$ – наихудший вектор начальных глобальных несовершенств;

– на предельные значения управляемых параметров

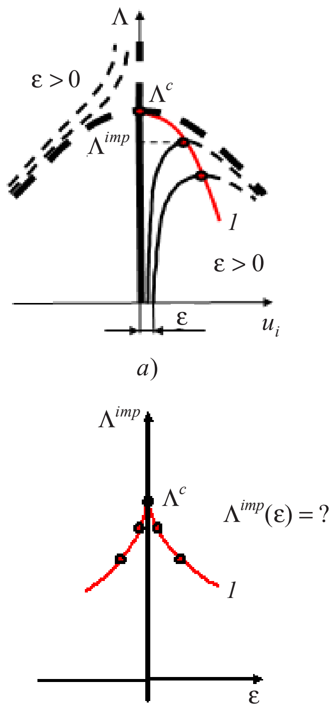
$$\mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{X}_{\min}$ и $\mathbf{X}_{\max}$ – нижние и верхние значения для параметров проектирования.

2. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия зависит от вектора перемещений, пропорционального множителя нагрузки, вектора несовершенств. Для упрощения уравнений используем один параметр несовершенства ε и считаем, что все компоненты внешней нагрузки пропорциональны одному изменяющемуся параметру Λ. Уравнения равновесия для критического состояния конструкции имеют вид:

$$\mathbf{r}^c(\mathbf{u}^{imp},\Lambda^{imp},\varepsilon)=0. \quad (4)$$



а)

б)

Рис. 1

Рассмотрим кривую критических состояний *1*, рис. 1*а*, *б*. Параметрические уравнения кривой критических состояний:

$$\mathbf{u}^{imp}=\mathbf{u}^{imp}(t),\ \Lambda^{imp}=\Lambda^{imp}(t),\ \varepsilon=\varepsilon(t), \quad (5)$$

где t – параметр продвижения вдоль кривой критических состояний.

3. Классификация критических точек

Условие потери устойчивости конструкции:

$$\dot{\Lambda}^{imp}\Phi_1^T\mathbf{r}_\Lambda^c+\dot{\varepsilon}\,\Phi_1^T\mathbf{r}_\varepsilon^c=0, \quad (6)$$

где $\mathbf{\Phi}_1$ – первая форма потери устойчивости конструкции.

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T\mathbf{r}_\Lambda^c=0,\ \Phi_1^T\mathbf{r}_\varepsilon^c\neq 0,\quad \dot{\Lambda}^{imp}\neq 0,\quad \dot{\varepsilon}=0, \quad (7)$$

называется асимметричной точкой бифуркации.

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T\mathbf{r}_\Lambda^c=0,\ \Phi_1^T\mathbf{r}_\varepsilon^c\neq 0,\quad \dot{\Lambda}^{imp}=0,\quad \dot{\varepsilon}=0, \quad (8)$$

называется симметричной точкой бифуркации.

Точка, для которой выполняется условие

$$\Phi_1^T\mathbf{r}_\Lambda^c\neq 0,\ \Phi_1^T\mathbf{r}_\varepsilon^c=0,\quad \dot{\Lambda}^{imp}=0,\quad \dot{\varepsilon}=0, \quad (9)$$

называется предельной точкой.

4. Зависимости $\Lambda^{imp}(t),\mathbf{u}^{imp}(t)$

Рассмотрим симметричную особую точку бифуркации, для которой справедливо:

$$\Phi_1^T\frac{\partial\mathbf{K}^c}{\partial\mathbf{u}}\Phi_1\Phi_1=0,\quad \dot{\Lambda}^{imp}(t_0)=0,$$
$$\dot{\varepsilon}(t_0)=0,\quad \ddot{\varepsilon}(t_0)=0, \quad (10)$$

где t_0 соответствует отсутствию несовершенств у конструкции. Учитывая разложения в ряд Тейлора для Λ^{imp} и ε получаем

$$\Lambda^{imp}(t)=\Lambda^{imp}(t_0)+$$
$$+\ddot{\Lambda}^{imp}(t_0)\left(\frac{6(\varepsilon(t)-\varepsilon(t_0))}{\dddot{\varepsilon}(t_0)}\right)^{2/3},$$
$$\mathbf{u}^{imp}(t)=\mathbf{u}^{imp}(t_0)+$$
$$+\dot{\mathbf{u}}^{imp}(t_0)\left(\frac{6(\varepsilon(t)-\varepsilon(t_0))}{\dddot{\varepsilon}(t_0)}\right)^{1/3}+$$
$$+\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}^{imp}(t_0)\left(\frac{6(\varepsilon(t)-\varepsilon(t_0))}{\dddot{\varepsilon}(t_0)}\right). \quad (11)$$

Задача определения производных $\ddot{\Lambda}^{imp}$, $\dddot{\varepsilon}$, $\dot{\mathbf{u}}^{imp}$, $\ddot{\mathbf{u}}^{imp}$ по параметру продвижения t вдоль кривой критических состояний *1* выходит за рамки этой статьи.

5. Частная задача оптимизации для нахождения наихудшего вектора несовершенств

Требуется определить такой $\boldsymbol{\varepsilon}^{наихудший}$ из области допустимых значений, для которого критический множитель нагрузки минимален:

$$\Lambda^{imp}(\mathbf{X},\varepsilon^{наихудший})=\min_{\varepsilon\in F}\Lambda^{imp}(\mathbf{X},\varepsilon). \quad (12)$$

Область допустимых значений F определяется следующим ограничением:

$$F=\{\varepsilon\,|\,\varepsilon^T\mathbf{H}\varepsilon=1\}, \quad (13)$$

где $\mathbf{H}$ – положительно определенная матрица.

6. Алгоритм оптимизации

1. Присвоить значения для параметров Λ^d, $\mathbf{X}_{\max}$, $\mathbf{X}_{\min}$. Присвоить начальные значения для $\mathbf{X}$.
2. Найти критическую нагрузку потери устойчивости для конструкции без несовершенств.
3. Вычислить $\Lambda^{imp}(\mathbf{X},\boldsymbol{\varepsilon})$ Определить из частной задачи оптимизации наихудший вектор несо-

вершенств $\boldsymbol{\varepsilon}^{наихудший}$.

4. Вычислить производные

$$\frac{\partial \Lambda^{imp}(\mathbf{X},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{наихудший})}{\partial X_i} \text{ и } \frac{\partial W(\mathbf{X})}{\partial X_i}.$$

5. Обновить значения для $\mathbf{X}$ используя метод приведенного квадратичного программирования.

6. Перейти к шагу 2, если критерий останова не удовлетворяется.

Заключение

Сформулирована новая задача оптимального проектирования геометрически нелинейных упругих стержневых конструкций. Сформулирована частная задача оптимизации для нахождения наихудшего вектора несовершенств и проведена классификация некратных критических точек.

Список литературы

1. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Анализ закритического поведения геометрически нелинейных упругих пространственных рам // Вестник ННГУ. Серия механика. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2004. Вып. 1(6). С. 177–190.

2. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Анализ устойчивости равновесных кривых нелинейных конструкций и анализ чувствительности в кратных критических точках // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Нижегород. ун-т., 2006. Вып. 68. С. 126–138.

3. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Оптимизация геометрически нелинейных стержневых конструкций с начальными глобальными несовершенствами // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Нижегород. ун-т., 2010. Вып. 72. С. 100–112.

OPTIMIZATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR BAR STRUCTURES WITH INITIAL GLOBAL IMPERFECTIONS

V.G. Kiselev, O.A. Sergeyev, S.A. Sergeyeva

Issues related to modeling imperfections arise when structure is designed for the first time and information on initial imperfections is not available. In most papers related to the stability of structures are considered imperfections, which are known at discrete points. Our task is to find the worst form of imperfections, which gives the greatest decrease in the buckling load of the structure. Criteria are formulated for classifying the four types of critical points: asymmetrical special bifurcation point, symmetrical special bifurcation point of the first or second kind, and limit point. Accounting for the initial imperfections of the structure results in the degeneration of asymmetric and symmetric special bifurcation points into limit points.

Keywords: optimization, sensitivity analysis, geometrically nonlinear bar structures, initial global imperfections, critical load, total loss-of-stability, non-multiple limit points, non-multiple special bifurcation points.