УДК 539.375;539.376

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

А.М. Коврижных

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск

amkovr@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Считается, что деформация ползучести является результатом сдвигов в направлениях действия главных касательных напряжений. Определяющие соотношения получены проектированием этих сдвигов на главные оси напряжений и добавлением упругих деформаций. Разрушение материала начинается при достижении максимальным сдвигом критической величины, что приводит к потере сдвиговой прочности. Такой подход позволяет учитывать разрушение при ползучести без применения кинетического уравнения поврежденности Качанова – Работнова. С применением модели, основанной на максимальном касательном напряжении и степенном законе, решены задачи о деформировании и разрушении упруго-ползучего тела в стадиях неустановившейся и установившейся ползучести. Рассматриваются цилиндрическая и сферическая полости в неограниченном теле под действием внутреннего и внешнего давления. Определены напряжения, деформации ползучести, время начала разрушения, положение фронта разрушения и скорость его распространения в любой момент времени.

Ключевые слова: деформация, ползучесть, степенной закон, критическая деформация сдвига, разрушение.

Деформирование и разрушение цилиндрической полости

Рассматривается плоская деформация материала вокруг цилиндрической полости радиуса $r = a$ в неограниченном теле. Обозначим σ_r, σ_θ, σ_z – радиальное, тангенциальное и осевое напряжения соответственно. На поверхности $r = a$ действует постоянное давление $\sigma_r = -p$, а при $r \to \infty$ материал не нагружен: $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$. В упругой задаче имеет место неравенство $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$, и поэтому необратимая деформация ползучести будет представлять собой сдвиг в направлении действия $\tau_{\max} = (\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ [1]. Будем считать, что этот сдвиг и скорость его изменения в условиях ползучести связаны с максимальным касательным напряжением степенным законом:

$$\gamma_c = \Omega(t)\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2}\right)^n,$$
$$\dot{\gamma}_c = \frac{d\Omega(t)}{dt}\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2}\right)^n. \qquad (1)$$

Проектируя сдвиг γ_c на главные оси напряжений и учитывая упругие деформации, получим:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\gamma_c}{2} + \frac{1-\nu}{2\mu}\sigma_\theta - \frac{\nu}{2\mu}\sigma_r,$$
$$\varepsilon_r = -\frac{\gamma_c}{2} + \frac{1-\nu}{2\mu}\sigma_r - \frac{\nu}{2\mu}\sigma_\theta. \qquad (2)$$

Если в (2) не учитывать упругие деформации, то, применяя (1), граничные условия для напряжения σ_r, уравнение равновесия и условие совместности деформаций определим как

$$\sigma_\theta = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{2/n}\left(1 - \frac{2}{n}\right),$$
$$\sigma_r = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{2/n}, \quad \gamma_c = \Omega(t)\frac{p^n a^2}{n^n r^2}. \qquad (3)$$

Для учета упругих деформаций перейдем к безразмерным величинам:

$$\gamma = \frac{\mu}{p}\gamma_c, \quad \tau = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2p}, \quad \tilde{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{p},$$
$$\tilde{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{p}, \quad \tilde{t} = \mu p^{n-1}\Omega(t), \quad \tilde{r} = r/a. \qquad (4)$$

Выражая из (1) $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ через γ_c, учитывая определяющие соотношения (2), уравнения равновесия и совместности деформаций, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\tilde{r}} + \frac{2(1-\nu)}{n\gamma}\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n}\frac{\partial\gamma}{\partial\tilde{r}} +$$
$$+\frac{2\gamma}{\tilde{r}} + \frac{4(1-\nu)}{\tilde{r}}\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n} = 0. \qquad (5)$$

Найдем решение (5) для γ и $\tau = (\gamma/\tilde{t})^{1/n}$, которое совпадает с упругим при $\tilde{t} = 0$ и с решением (3) при $\tilde{t} \to \infty$:

$$\gamma + 2(1-\nu)\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n} = \left[2(1-\nu) + \frac{\tilde{t}}{n^n}\right]\frac{1}{\tilde{r}^2}.$$

Определим время начала разрушения, положение фронта разрушения $r = c$ и скорость его распространения без учета упругих деформаций. При нагружении полости постоянным внутренним давлением происходит рост деформаций ползучести и при $t = t_0$, когда $\gamma_c = \gamma_*$, ее контур $r = a$ разрушается. Время начала разрушения t_0 определим из (3): $\Omega(t_0) = \Omega_0 = \gamma_* n^n / p^n$. При $t > t_0$ имеются две зоны: $r > c$ – зона ползучести и $a \le r \le c$ – зона разрушения. Из условия непрерывности скорости $\dot{u}$ при $r = c$, получим дифференциальное уравнение:

$$d\Omega(t) = \frac{\gamma_* n^n}{p^n}\frac{dc}{c}, \tag{6}$$

которое интегрируется с учетом условия, что при $t = t_0$, $c = a$:

$$\Omega(t) = \Omega_0\left(1 + \ln\frac{c}{a}\right), \quad \frac{c}{a} = \exp\left(\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} - 1\right),$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{a}{\Omega_0}\exp\left(\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} - 1\right)\frac{d\Omega(t)}{dt}. \tag{7}$$

Аналогичным образом решается задача о нагружении тела со свободной полостью внешним давлением на бесконечности. Так как в этом случае $\sigma_r > \sigma_z > \sigma_\theta$, то для получения решения нужно использовать новое граничное условие для σ_r и в (1), (2) направления θ и r поменять местами.

Деформирование и разрушение сферической полости

Рассмотрим деформирование и разрушение сферической полости при постоянном внутреннем давлении. Из анализа упругого решения следует, что $\sigma_\theta = \sigma_\varphi > \sigma_r$, и поэтому деформация ползучести является результатом сдвигов в направлениях главных касательных напряжений $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ и $(\sigma_\varphi - \sigma_r)/2$ [1]. Такое напряженное состояние будем называть состоянием полной ползучести. В этом случае определяющие соотношения имеют вид:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\gamma_c}{2} + \frac{1-\nu}{E}\sigma_\theta - \frac{\nu}{E}\sigma_r,$$

$$\varepsilon_r = -\gamma_c - \frac{2\nu}{E}\sigma_\theta + \frac{1}{E}\sigma_r. \tag{8}$$

Если в (8) не учитывать упругие деформации то, применяя (1), граничные условия для напряжения σ_r, уравнение равновесия и условие совместности деформаций, определим:

$$\sigma_\theta = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{3/n}\left(1 - \frac{3}{2n}\right),$$

$$\sigma_r = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{3/n}, \quad \gamma_c = \Omega(t)\left(\frac{3p}{4n}\right)^n\frac{a^3}{r^3}. \tag{9}$$

Для решения этой задачи с учетом упругих деформаций перейдем к безразмерным величинам, которые определяются из (4) с заменой μ на E. Выражая из (1) $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ через γ_c, учитывая определяющие соотношения (8), уравнение равновесия и условие совместности деформаций, получим:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\tilde{r}} + \frac{4(1-\nu)}{n\gamma}\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n}\frac{\partial\gamma}{\partial\tilde{r}} + \frac{3\gamma}{\tilde{r}} + \frac{12(1-\nu)}{\tilde{r}}\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n} = 0. \tag{10}$$

Решая (10), найдем интегралы для γ и $\tau = (\gamma/\tilde{t})^{1/n}$, которые при $\tilde{t} = 0$ совпадают с упругим решением, а при $\tilde{t} \to \infty$ – с решением (9):

$$\gamma + 4(1-\nu)\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n} = \left[3(1-\nu) + \tilde{t}\left(\frac{3}{4n}\right)^n\right]\frac{1}{\tilde{r}^3}. \tag{11}$$

При заданных значениях независимых переменных $\tilde{r}$, $\tilde{t}$ и величинах ν, n из (11) можно определить γ и τ. Далее из уравнения равновесия и граничного условия $\tilde{\sigma}_r = -1$ при $\tilde{r} = 1$ путем численного интегрирования по $\tilde{r}$ можно определить $\tilde{\sigma}_r$ и $\tilde{\sigma}_\theta$.

Время начала разрушения сферической полости t_0 без учета упругих деформаций определяется из уравнения $\Omega(t_0) = \Omega_0 = \gamma_*(4n)^n/(3p)^n$. Из условия непрерывности радиальной скорости точек фронта разрушения также получим формулы (7).

Задача о нагружении тела со свободной сферической полостью внешним давлением на бесконечности решается аналогичным образом. Так как в этом случае $\sigma_r > \sigma_\varphi > \sigma_\theta$, то для получения решения нужно использовать новое граничное условие для σ_r и в (1), (2) направления θ и r поменять местами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №11-08-00320.

Список литературы

1. Коврижных А.М. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №4. С. 140–146.
2. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1960.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.

THE MODEL OF DEFORMATION AND FAILURE OF MATERIAL UNDER CREEP

A.M. Kovrizhnykh

It is universally considered that the creep deformation is caused by shears, developing along lines of the main tangential stresses. Constitutive relations are derived by projecting the said shears on the main stress axes and by adding the elastic strains. The material failure is initiated when the maximum shear reaches a critical value and causes the loss of the shear strength. This approach makes the grounds to take into account the material failure under creep conditions without using the Kachanov−Rabotnov kinetic damage equation. The model, based on the maximum tangential stress and the exponential law is used to solve the problem of deformation and failure of an elastic-creep body at the unsteady and steady creep stages. The cylindrical and spherical cavities in an infinite body are considered under the internal and external pressures. Stresses, creep strains, time of the failure initiation, a failure-front location and the velocity of failure front propagation are evaluated at every instant of time.

Keywords: deformation, creep, exponential law, critical shear strain, failure.