УДК 532.5:539.3

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СТЕНОК ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ

***Д.В. Кондратов*[1], *Т.В. Быкова*[2]**

[1]Поволжская академия государственной службы им. П.А. Столыпина, Саратов
[2]Саратовский государственный технический университет

KondratovDV@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Поставлена и решена связанная задача упругогидродинамики, состоящая из уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости и уравнений динамики внутренней и внешней упругих цилиндрических оболочек конечной длины, основанных на гипотезах Кирхгофа–Лява, с соответствующими граничными условиями при гармоническом изменении давления на входе и выходе упругой трубы кольцевого сечения. Найдены параметры течения и упругие перемещения оболочек. Определены их амплитудные и фазовые частотные характеристики и резонансные частоты. Рассмотрены случаи свободного опирания и жесткого защемления оболочек по торцам и влияния типа закрепления и свойств жидкости на резонансные частоты и амплитудные частотные характеристики оболочек.

Ключевые слова: вязкая жидкость, труба кольцевого сечения, упругие соосные оболочки, перепад давления.

1. Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе кольцевого сечения, образованного поверхностями упругих соосных цилиндрических оболочек. Внутренний R_1 и срединной поверхности $R^{(1)}$ радиусы внешней оболочки, а также внешний радиус R_2 и радиус срединной поверхности $R^{(2)}$ внутренней оболочки значительно больше ширины $\delta = R_1 - R_2$ цилиндрической щели кольцевого сечения. Толщины внешней $h_0^{(1)} = 2(R^{(1)} - R_1)$ и внутренней $h_0^{(2)} = 2(R_2 - R^{(2)})$ оболочек значительно меньше радиусов их срединных поверхностей $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$. Длины оболочек l одинаковы, а упругие перемещения значительно меньше ширины δ цилиндрической щели. Течение происходит под действием переменного по времени перепада давления.

2. Течение жидкости между оболочками осесимметричное и описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности, которые можно записать в виде:

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_k}{\partial r} + V_y \frac{\partial V_k}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial k} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} - \chi \frac{V_r}{r^2}\right);$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Здесь $k = r$ или y; $\chi = 1$ при $k = r$, $\chi = 0$ при $k = y$; V_y, V_r – компоненты вектора скорости жидкости в цилиндрической системе координат $(\bar{n}_r, \bar{j})$, начало O которой находится в центре внутренней оболочки; p – давление жидкости; ρ – плотность жидкости; ν – кинематический коэффициент вязкости; y – координата вдоль оси симметрии Oy; r – расстояние от оси Oy; t – время.

Граничные условия для системы (1) представляют условия прилипания жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на концах механической системы:

$$V_r = \partial u_3^{(i)} / \partial t, \quad V_y = -\partial u_1^{(i)} / \partial t \ \text{ при } \ r = r^{(i)};$$

$$p = p^{+} \ \text{ при } \ y = l/2,$$

$$p = p^{-} \ \text{ при } \ y = -l/2, \quad (2)$$

где $i = 1$ для внешней оболочки, $i = 2$ для внутренней оболочки, $u_3^{(i)}$ – прогибы оболочек, положительные в сторону, противоположную центру кривизны; $u_1^{(i)}$ – продольные перемещения оболочек, положительные в сторону, противоположную оси Oy, $r^{(1)} = R_2 + \delta + u_3^{(1)}$, $r^{(2)} = R_2 + u_3^{(2)}$.

Уравнения динамики упругих цилиндрических оболочек описываются уравнениями теории Кирхгофа–Лява и имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}}\left[\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial t^2} - q_s^{(i)}\right];$$

$$-\frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y}+\frac{u_3^{(i)}}{R^{(i)}}+\left(a_0^{(i)}R^{(i)}\right)^2\frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4}=$$
$$=\frac{1-(\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)}h_0^{(i)}}\left[-\rho_0^{(i)}h_0^{(i)}\frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial t^2}-(-1)^i q_n^{(i)}\right], \quad (3)$$

где $E^{(i)}$ – модули Юнга материала оболочек, $\mu_0^{(i)}$ – коэффициенты Пуассона материала оболочек, $\rho_0^{(i)}$ – плотности материала оболочек, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к срединной поверхности верхней и нижней оболочек; $\bar{S}=-\bar{j}$ – единичный вектор в продольном направлении в срединных поверхностях оболочек, противоположный вектору $\bar{j}$; $\bar{n}_r$, $\bar{j}$ – единичные векторы полярной системы координат;

$$a_0^{(i)}=\sqrt{(h_0^{(i)})^2/(12(R^{(i)})^2)},$$
$$q_s^{(i)}=-[P_{ry}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_r)+P_{yy}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{j})]\Big|_{r=r^{(i)}},$$
$$q_n^{(i)}=-[P_{rr}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_r)+P_{ry}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{j})]\Big|_{r=r^{(i)}},$$
$$P_{ry}=\rho\nu\left(\frac{\partial V_y}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial y}\right),\quad P_{kk}=-p+2\rho\nu\frac{\partial V_k}{\partial k};$$
$$k=r \text{ или } y,\quad \cos(\bar{n},\bar{n}_r)=\frac{r^{(i)}}{|\bar{N}^{(i)}|},$$
$$\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{j})=-\frac{r^{(i)}}{|\bar{N}^{(i)}|}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y};$$
$$|\bar{N}^{(i)}|=\left\{(r^{(i)})^2\left[1+\left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y}\right)\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Граничные условия для перемещений оболочки состоят либо в условиях свободного опирания, либо жесткого защемления по торцам:

$$\partial u_1^{(i)}/\partial y=0,\quad u_2^{(i)}=0,\quad u_3^{(i)}=0,$$
$$\partial^2 u_3^{(i)}/\partial y^2=0 \quad \text{при } y=\pm l/2, \quad (4)$$
$$u_1^{(i)}=0,\quad u_3^{(i)}=0,$$
$$\partial u_3^{(i)}/\partial y=0 \quad \text{при } y=\pm l/2. \quad (5)$$

3. Для решения задачи (1)–(5) перейдем к безразмерным переменным [1, 2]:

$$\xi=(r-R_2)/\delta,\quad \zeta=2y/l,\quad \tau=\omega t,$$
$$V_r=w_m^{(1)}\omega u_\xi,\quad V_y=(w_m^{(1)}\omega/\psi)\sigma u_\zeta,$$
$$u_1^{(i)}=u_m^{(i)}U_1^{(i)},\quad u_3^{(i)}=w_m^{(i)}U_3^{(i)},\quad \lambda^{(i)}=w_m^{(i)}/\delta,$$
$$\sigma=l(2R_2),\quad p=p_0+\rho\nu w_m^{(1)}\omega^2 P/(\psi^2\,\mathrm{Re}),$$
$$\psi=\delta/R_2<<1,\quad \mathrm{Re}=\delta^2\omega/\nu. \quad (6)$$

Подставим безразмерные переменные (6) в уравнения динамики жидкости (1), в условия прилипания жидкости (2), в уравнения динамики оболочек (3), а также в граничные условия (4) и (5). Подставляя решение в виде асимптотического разложения по степеням малых параметров ψ и $\lambda^{(1)}$ и оставляя главные члены разложения, получим уравнения динамики жидкости в нулевом приближении по ψ и $\lambda^{(1)}$. Полагая гармоническую зависимость от времени давления в жидкости, компонент скорости жидкости и упругих перемещений оболочек, находим компоненты скорости жидкости и безразмерное редуцированное давление.

При решении уравнений динамики упругих оболочек (3) формы упругих перемещений выбираются в следующем виде:

– для граничных условий (4)

$$u_1^{(i)}=u_m^{(i)}U_1^{(i)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{11}^{(i)}\sin\frac{2k-1}{2}\pi\zeta+u_{12}^{(i)}\cos k\pi\zeta\right],$$
$$u_3^{(i)}=u_m^{(i)}U_3^{(i)}= \quad (7)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{31}^{(i)}\cos\frac{2k-1}{2}\pi\zeta+u_{32}^{(i)}\sin k\pi\zeta\right],$$

– или соответственно для граничных условий (5)

$$u_1^{(i)}=u_m^{(i)}U_1^{(i)}=u_{11}^{(i)}\zeta(1-\zeta^2)+u_{12}^{(i)}(1-\zeta^2)^2,$$
$$u_3^{(i)}=u_m^{(i)}U_3^{(i)}=u_{31}^{(i)}(1-\zeta^2)+u_{32}^{(i)}\zeta(1-\zeta^2)^2. \quad (8)$$

Решая уравнения динамики оболочек (3) с граничными условиями (4) или (5) в предположениях (7) или (8), получим выражения для прогибов внутренней и внешней оболочек, а затем и для их амплитудных и фазовых частотных характеристик, которые имеют вид:

$$A_{31}^{(2)}(\omega)=\frac{1}{2}\frac{B}{|D|}\sqrt{G^2(H_1^2+H_2^2)},$$
$$A_{32}^{(2)}(\omega)=\frac{1}{2}\frac{C}{|F|}\sqrt{K^2(S_1^2+S_2^2)},$$
$$A_{31}^{(1)}(\omega)=\frac{1}{2}\frac{B}{|D|}\times$$
$$\times\sqrt{G^2\left(\left(\frac{G_2}{G}H_1\right)^2+\left(H_2-\frac{G_1}{G}H_1\right)^2\right)},$$
$$A_{32}^{(1)}(\omega)=\frac{1}{2}\frac{C}{|F|}\times \quad (9)$$
$$\times\sqrt{K^2\left(\left(\frac{K_2}{K}S_1\right)^2+\left(S_2-\frac{K_1}{K}S_1\right)^2\right)},$$
$$\Psi=\mathrm{arctg}\frac{H_1}{H_2},\quad \Theta=\mathrm{arctg}\frac{G_2H_1}{GH_2-G_1H_1},$$
$$\Phi=\mathrm{arctg}\frac{S_1}{S_2},\quad \mathrm{H}=\mathrm{arctg}\frac{K_2S_1}{KS_2-K_1S_1},$$

где B, C, D, F, G, G_1, G_2, H_1, H_2, S_1, S_2, K_1, K_2, K – коэффициенты, зависящие от частоты пульсации, размеров трубы и параметров жидкости.

4. Проведено численное моделирование поведения амплитудных и частотных характеристик внутренней и внешней оболочек и давления в слое жидкости. Показано, что изменением размеров и типа закрепления оболочек можно сместить резонансные частоты внутренней и внешней оболочек цилиндрической трубы кольцевого профиля в необходимый диапазон частот, а также увеличить или уменьшить величины прогибов на резонансных частотах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-01-00177-а.

Список литературы

1. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Пульсирующее ламинарное течение жидкости по упругой цилиндрической трубе кольцевого сечения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. №4. С. 59–71.

2. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №3. С. 15–21.

OSCILLATIONS OF ELASTIC WALLS OF A PIPE OF A RING CROSS-SECTION WITH A PULSING LAMINAR LIQUID FLOW

D.V. Kondratov, T.V. Bykova

A coupled problem of hydroelasticity consisting of dynamic equations of a viscous incompressible liquid and dynamic equations of interior and external elastic cylindrical shells of final length, based on hypotheses of the Kirchhoff – Love, with the corresponding boundary conditions is formulated and solved for a harmonic modification of the inlet and outlet pressure of an elastic pipe of the ring cross-section. From the solution of this problem, parameters of the flow and elastic displacements of the shells are determined. Their amplitude and phase frequency characteristics and resonance frequencies are found. Cases of simply supported and rigidly clamped at the ends shells are analyzed, as well as the effect of the type of fixing and of the properties of the fluid on resonance frequencies and amplitude frequency characteristics of the shells.

Keywords: viscous fluid, pipe of ring cut, elastic coaxial envelopes, pressure difference.