УДК 534.1,517.9

К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ДЮФФИНГА – ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Р.Е. Кондрашов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

romicmmf2006@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматривается задача о глобальном поведении решений системы двух уравнений Дюффинга–Ван-дер-Поля, близких к нелинейным интегрируемым. В областях, не содержащих невозмущенных сепаратрис, исследуются частично усредненные системы, описывающие поведение решений исходной системы в резонансных зонах. Устанавливается ограниченность числа нетривиальных резонансных структур. Исследуются полностью усредненные системы, определяющие поведение решений вне окрестностей нетривиальных резонансных структур. В окрестностях невозмущенных сепаратрис решается вопрос о существовании гомоклинической структуры Пуанкаре. Численные результаты иллюстрируют и подтверждают теоретические результаты.

Ключевые слова: предельные циклы, резонансы, усреднение.

Введение

Исследованию системы двух связанных уравнений Дюффинга–Ван-дер-Поля посвящено большое число работ, в которых либо изначально рассматривается квазилинейная система, либо теоретическое исследование оправдано лишь в квазилинейном случае, либо проводилось лишь численное исследование. В [1] рассматриваются существенно нелинейные системы общего вида, близкие к интегрируемым. Однако до сих пор отсутствуют работы, в которых бы исследовались резонансные структуры и решался вопрос о глобальном поведении решений в конкретных системах.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + x + \alpha x^3 = \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 y], \\ &\ddot{y} + y + \beta y^3 = \varepsilon[(p_3 - y^2)\dot{y} + p_4 x], \end{aligned} \qquad (1)$$

где α, β, p_1, p_2, p_3, p_4 – параметры, причем $\alpha, \beta = \pm 1$. Говорят, что в системе (1) имеет место резонанс, если $\omega_1 = (q/p)\omega_2$, где $\omega_1(h_1)$, $\omega_2(h_2)$ – частоты невозмущенных осцилляторов; p, q – взаимно простые целые числа, а h_1, h_2 – значения интегралов энергии невозмущенных уравнений. Условие резонанса определяет на плоскости (h_1, h_2) резонансные кривые.

1. Исследование усредненных систем

Возьмем некоторую точку (h_{1pq}, h_{2pq}) на резонансной кривой. Система (1) в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности этой точки приводится (с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^{3/2})$) к виду [1]:

$$\begin{aligned} u_k' &= A_k(v; I_{1pq}, I_{2pq}) + \mu[P_{k1}(v; I_{1pq}, I_{2pq})u_1 + \\ &\quad + P_{k2}(v; I_{1pq}, I_{2pq})u_2], \\ v' &= b_{10}u_1 + b_{20}u_2 + \mu[b_{11}u_1^2 + b_{21}u_2^2 + \\ &\quad + G_0(v; I_{1pq}, I_{2pq})], \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, штрих означает производную по «медленному» времени $\tau = \mu t$, а функции $A_k(v; I_{1pq}, I_{2pq})$, $P_{k1}(v; I_{1pq}, I_{2pq})$, $P_{k2}(v; I_{1pq}, I_{2pq})$ – периодические по v с периодом $2\pi/p$ (подробности см. в [1]).

Оставляя в функциях $A_k(v)$ главные гармоники, получаем $A_k = C_k \sin(pv) + B_k$, $k = 1, 2$, где C_k, B_k – постоянные, зависящие от h_1, h_2. При этом $B_k = B_k(h_k)$ и B_1 зависит от параметра p_1, а B_2 – от p_3 [2].

Если в системе (2) отсутствуют состояния равновесия, тогда имеем проходимый резонанс.

Будем говорить, что имеет место нетривиальная резонансная структура, если у системы (2) существуют простые состояния равновесия. В этом случае у исходной системы существуют резонансные периодические решения.

Условие существования нетривиальных резонансных структур имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} p_2 p B_2(h_2, p_3) &= p_4 q B_1(h_1, p_1), \\ p\omega_1(h_1) &= q\omega_2(h_2). \end{aligned} \qquad (3)$$

Из (3) следует, что существование нетривиальных резонансных структур существенно зависит от того, совпадают ли выбранные замкнутые фазовые кривые в невозмущенных осцилляторах с уровнями, порождающими предельные циклы в несвязанных уравнениях. Далее были вычислены функции P_{k1}, P_{k2}, установлен тип состояний равновесия и возможные топологические структуры системы (2) [2, 3].

2. Глобальное поведение решений

Не для каждой резонансной кривой существуют простые состояния равновесия (периодические решения соответствующего периода в исходной системе). Доказано, что множество пар (p; q), для которых существуют простые состояния равновесия в системе (2), не более чем конечно.

Используя полностью усредненную систему (ПУС)

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \varepsilon B_1(h_1, p_1), \\ \dot{h}_2 &= \varepsilon B_2(h_2, p_3), \end{aligned} \tag{4}$$

которая получается из (1) после перехода к переменным типа действие–угол и усреднения по угловым координатам, было установлено глобальное поведение решений.

Качественное поведение решений системы (4) нетрудно получить, ибо двухмерная система разбивается на две одномерные системы. Так как у каждой системы имеется нетривиальное устойчивое состояние равновесия, то соответственно у двухмерной системы будет существовать устойчивое состояние равновесия $O(h_{10}, h_{20})$. В этом случае у каждого автоколебательного уравнения, получающегося из (1) при отсутствии связи ($p_2 = p_4 = 0$), существует устойчивый предельный цикл. Возможны два случая: 1) резонансный, когда $h_{10} = h_{1pq}$, $h_{20} = h_{2pq}$, и 2) нерезонансный. В резонансном случае в исходной системе будет существовать периодическое решение, в нерезонансном – двухмерный устойчивый инвариантный тор с квазипериодической обмоткой. Используя (4), можно получить представление о глобальном поведении решений исходной системы (1). При отсутствии в (2) простых состояний равновесия ПУС описывает эволюцию в исходной системе. Если на плоскости (h_1, h_2) выбрать начальные значения вне окрестностей нетривиальных резонансов, то фазовая точка системы (1) при изменении t будет двигаться по траектории ПУС. Далее она либо попадает в окрестность нетривиального резонанса, либо не попадает в окрестность такого резонанса и стремится к состоянию равновесия ПУС или покидает рассматриваемую область. В первом случае фазовая точка либо стремится к устойчивому резонансному периодическому движению, либо проходит эту окрестность и продолжает движение по соответствующей траектории ПУС. В случае $\alpha = -1$, $\beta = 1$ найдено условие существования гомоклинической структуры Пуанкаре.

Автор благодарен А.Д. Морозову за руководство работой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-01-00356.

Список литературы

1. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.-Ижевск: РХД, 2005. С. 420.

2. Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д. К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван-дер-Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, №2. С. 241–254.

3. Morozov A.D., Kondrashov R.E. On resonances in systems of two weakly connected oscillators // RCD. 2009. Vol. 14, №2. P. 237–247.

ON THE INVESTIGATION OF SYSTEMS OF TWO DUFFING – VAN DER POL EQUATION

R.E. Kondrashov

The problem of global behavior of solutions in system of two Duffing – van der Pol equations close to nonlinear integrable ones is considered. For regions without unperturbed separatrixes, partially averaged systems which describe the behavior of solutions of original system in resonant zones are investigated. The finiteness of the number of non-trivial resonant structures is established. Fully averaged systems which describe the behavior of solutions outside the vicinity of non-trivial resonant structures are also investigated. In the vicinity of unperturbed separatrixes the question of existence of a homoclinic Poincare structure is considered. Numerical results illustrate and confirm the theoretical results.

Keywords: limit cycles, resonances , averaging.