

УДК 620.1

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ СОЗДАНИЯ СТРУКТУР КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ СВОЙСТВАМИ

© 2011 г.

Н.П. Копытов, Е.А. Митюшов

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

mityushov-e@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматривается проблема равномерного распределения точек, необходимого для создания структуры волокнистых композитных оболочек произвольных форм с трансверсально-изотропными свойствами. Предлагаемый подход основан на использовании методов статистического моделирования. Описывается универсальная математическая модель, позволяющая равномерно распределять точки на произвольных поверхностях.

Ключевые слова: равномерное распределение точек, структура волокнистых композитных оболочек.

Несмотря на простоту постановки, задача равномерного распределения точек на различных поверхностях является важной проблемой для многих прикладных исследований. Она имеет значение для таких научных направлений, как математическое моделирование, химия, биология, численные методы, моделирование физических процессов, компьютерная графика и многих других. Благодаря своей вариативности и большим прикладным возможностям, проблема вышла за рамки вспомогательной задачи и в различных частных и общих интерпретациях начала приобретать оттенки общематематического значения. Ее исследованиями занимаются ученые по всему миру, среди которых особо выделяются исследователи из США и Испании. В частности, задача равномерного распределения точек на сфере тесно связана с одной из математических проблем XXI века из списка Стивена Смейла [1, 2], а задача оптимального обхода распределенных на поверхности точек является разновидностью задачи коммивояжера, изучение которой способствует развитию методов комбинаторной оптимизации.

В настоящем исследовании задача равномерного распределения точек рассматривается в контексте создания структур волокнистых композитных оболочек с трансверсально-изотропными свойствами. Подобные оболочки становятся незаменимыми частями при конструировании летательных и космических аппаратов.

Предлагаемый метод основан на применении статистического моделирования. Он заключается в генерировании координат точек по функции

их совместной плотности распределения, которая соответствует равномерному распределению точек на поверхности. Эта функция находится аналитически. Для генерирования значения двумерной случайной величины используется обобщенный метод Неймана. Подход универсален для различных поверхностей, и поэтому может быть полезным во многих других исследованиях.

Рассмотрим процедуру получения функции совместной плотности распределения значений координат точек для их равномерного распределения на поверхностях. Пусть поверхность задана функцией $z = z(x, y)$, которая непрерывна и всюду дифференцируема на области D , где $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$. Найдем совместную плотность распределения координат для равномерного распределения точек на заданной поверхности.

Элемент площади поверхности равен

$$dS = \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy. \quad (1)$$

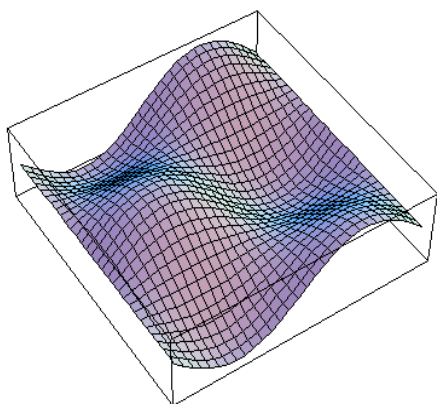
Находим отношение

$$\frac{dS}{S} = \frac{\sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy}{\iint_D \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy}. \quad (2)$$

Тогда совместная плотность распределения координат для равномерного распределения точек будет

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2}}{\iint_D \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy}. \quad (3)$$

Генерируя значения по совместной плотности распределения (3), получим соответствующие координаты равномерно распределенных по поверхности точек (пример представлен на рис. 1).



Проблема равномерного распределения точек в данном исследовании возникла в качестве вспомогательной задачи, но оказалась весьма интересной, обширной и потребовала особого внимания,

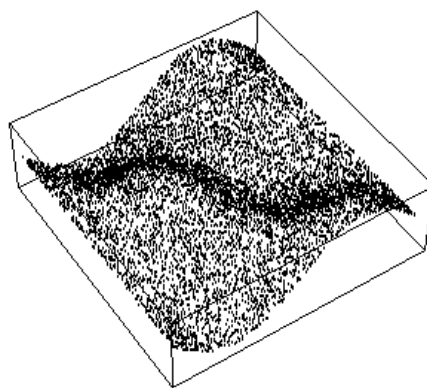


Рис. 1

Для моделирования случайной величины по функции плотности распределения применяются различные методы [3, 4]. Например, метод взятия обратной функции является удобным в случаях, когда можно получить аналитически обратную функцию. Однако применение данного метода усложняется для функции совместной плотности распределения, которая не разделяется на независимые функции. Поэтому в настоящем исследовании используется обобщенный метод Неймана (метод усечений).

Для одномерного случая выполняются следующие действия:

- 1) функция плотности распределения вписывается в прямоугольник;
- 2) генерируются два независимых числа эталонным генератором случайной величины с равномерным распределением на интервале (0, 1) и масштабируются по сторонам прямоугольника;
- 3) если полученная точка попадает в область под графиком, то точка принимается, иначе отбрасывается;
- 4) повторяются действия 1–3.

Аналогично метод обобщается для многомерного случая.

достойного отдельной работы. Нельзя не отметить, что известны методы равномерного распределения точек на гиперсфере и гиперэллипсоиде (многомерные сфера и эллипсоид), используемые в алгоритмах статистического моделирования различных процессов [3, 5], и это в очередной раз подчеркивает красоту и вариативность задачи.

Список литературы

1. Bendito E., Carmona A., Encinas A.M., Gesto J.M. Computational cost of the Fekete problem I: The Forces Method on the 2-Sphere, preprint, accessible in <http://www-ma3.upc.es/users/bencar/articulos/YJCPH2424.pdf>.
2. Bendito E., Carmona A., Encinas A.M., Gesto J.M. Computational cost of the Fekete problem II: on Smale's 7th problem, preprint, accessible in <http://www-ma3.upc.es/users/bencar/articulos/OnSales7thproblem.pdf>.
3. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. Simulation and the Monte-Carlo methods. Second Ed. Wiley-Interscience, 2007. 345 p.
4. Монаков А.А. Основы математического моделирования радиотехнических систем: Учеб. пособие. СПб., 2005. 100 с.
5. Weisstein E.W. Sphere Point Picking. From MathWorld A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html>.

UNIFORM DISTRIBUTION OF POINTS ON SURFACES TO CREATE STRUCTURES OF COMPOSITE SHELLS WITH TRANSVERSELY ISOTROPIC PROPERTIES

N.P. Kopytov, E.A. Mityushov

The study addresses the problem of uniform distribution of points required to create a structure of fibrous composite shells of arbitrary shapes with transversely isotropic properties. The proposed approach is based on statistical modeling. The universal mathematical model is described, which makes it possible to distribute points uniformly on arbitrary surfaces.

Keywords: reinforcement of shells, structure of fibrous composite shells.