Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2282–2284

УДК 531.38

КОЛЕБАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО РОТОРА ИЗ МАТЕРИАЛА С НЕЛИНЕЙНО НАСЛЕДСТВЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Е.П. Кубышкин

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

kubysh@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассмотрены колебательные режимы распределенного однородного вращающегося ротора из материала с нелинейно наследственными свойствами, возникающие при потере устойчивости положения равновесия. Показана возможность возникновения периодической прецессии, двухчастотных и хаотических колебаний.

Ключевые слова: распределенный ротор, устойчивость, нелинейные колебания.

Рассматривается идеальный распределенный ротор (вал) длиной l постоянного сечения, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω', концы которого опираются на подшипники. Материал ротора считается наследственно вязкоупругим и подчиненным нелинейной реологической модели Ю.Н. Работнова вязкоупругого тела:

$$\sigma(t) = E\left(\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^{0} R(\tau) f(\varepsilon(t+\tau))d\tau\right),$$

где $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ – соответственно напряжение и относительная деформация, E – модуль Юнга, $R(\tau)$ – функция релаксации, $f(\varepsilon) = \varepsilon + f_1\varepsilon + \dots$ $(f_j > 0)$ – нелинейная функция деформации. Функция $R(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$R(\tau) > 0, \quad d^2R(\tau)/d\tau^2 > 0, \quad \int_{-\infty}^{0} R(\tau)d\tau < 1,$$

$$R(\tau) \le M \exp(\gamma_0\tau) \ \ (M, \gamma_0 > 0) \quad \text{при} \ \ \tau \to \infty.$$

Математической моделью рассматриваемой механической системы в рамках гипотез изгибных деформаций Эйлера–Бернулли является следующая краевая задача:

$$u_{tt} + a(|u_t|^2)u_t + \Bigg(b(|u_{ss}|^2)u_{ss} - \int_{-\infty}^{0} R(\tau)\exp(-i\Omega\tau)b(|u_{ss}(s,t+\tau)|^2)\times u_{ss}(s,t+s)d\tau\Bigg)_{ss} = 0, \qquad (1)$$

$$u\big|_{s=0} = u_s\big|_{s=0} = 0, \quad u\big|_{s=1} = u_s\big|_{s=1} = 0 \qquad (2)$$

($u(s, t) = u_x(s, t) + iu_y(s, t)$, $i = \sqrt{-1}$), которая приведена в безразмерных переменных $s = z/l$, $u = u'/l$, $t = t'/t_0$, $\Omega = \Omega'/t_0$, $t_0 = m^{1/2}l^2(EI_0)^{-1/2}$. Функции $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ являются аналитическими в окрестности нуля и имеют вид: $a(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots, b(\zeta) = 1 + b_1\zeta + \dots$ Здесь $u'(z, t') = u'_x(z, t') + iu'_y(z, t')$ – соответственно смещения средней линии ротора в направлении осей OX и OY; ось OZ системы координат $OXYZ$, связанной с инерциальным пространством, направлена вдоль оси недеформированного ротора; t' – время; m – погонная масса ротора; функция $a(\zeta)$ определяет нелинейное вязкое трение; коэффициенты функции $b(\zeta)$ определяются коэффициентами функции $f(\varepsilon)$ и моментами инерции I_0 $(j = 0, 1,\dots)$ поперечного сечения ротора соответствующих порядков.

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением с бесконечным запаздыванием аргумента. Приведем определение решения краевой задачи (1), (2). Рассмотрим в $H = W_2^2(0,1)$ оператор $Bv \equiv v'^{v}$ с областью определения

$$H_B = \{v(s) \in W_2^4(0,1), v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}, \quad ((u,v)_B = (u'^{v}, v'^{v})_{L_2},$$

$$\|u\|_B = (u,u)_B),$$

которая является энергетическим пространством оператора B. Обозначим D_γ $(0 < \gamma < \gamma_0)$ пространство непрерывных функций вида

$$\{u(s,t): 0 \le s \le 1, \ -\infty < \tau \le 0, \ u(s,t) \in H \ \ (\text{по } s),$$

$$\|u(s,t)\|_D = \sup_{-\infty<\tau\le 0} (\exp(\gamma\tau)\|u(s,t)\|_B) < \infty\};$$

$B^{1/2}$ – положительный корень из оператора B. Под решением краевой задачи (1), (2) будем понимать функцию $u(s, t + \tau)$ $(-\infty < \tau \le 0)$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям (2) и начальным условиям

$$u(s,\tau) = u_0(s,\tau) \in D_\gamma,$$
$$u_t(s,0) = u_1(s) \in H_{B^{1/2}}. \qquad (3)$$

Исследуем устойчивость нулевого решения начально-краевой задачи (1)–(3). Определяя решения линейной части (1)–(3) вида $u_n(s,t) = e_n(s)\times$ $\times\exp(\lambda t)$, где $\lambda \in C$, $e_n(s)$ ($n = 1, 2, \ldots$) – собственные функции оператора B, отвечающие собственным значениям ω_n^2, получим последовательность характеристических уравнений вида

$$I_n(\lambda) \equiv \lambda^2 + a_0 + $$
$$+\omega_n^2\left(1 - \int_{-\infty}^{0} R(\tau)\exp((\lambda - i\Omega)\tau)d\tau\right) = 0 \qquad (4)$$

($n = 1, 2, \ldots$), расположение корней которых определяет устойчивость нулевого решения начально-краевой задачи (1)–(3). Отметим, что область $\mathrm{Re}\lambda < -\gamma_0$ является спектральной.

Для построения границы области устойчивости нулевого решения краевой задачи (1)–(3) в плоскости параметров $a_0 > 0$, $\Omega > 0$ используется метод D-разбиений, в соответствии с которым положим в (4) $\lambda = i\sigma$ ($\sigma > 0$) и выделим вещественную и мнимую части. В результате получим систему уравнений

$$-\sigma^2 + \omega_n^2(1 - R_c(\sigma - \Omega)) = 0,$$
$$a_0 = -\omega_n^2 R_s(\sigma - \Omega)/\sigma, \qquad (5)$$

которая определяет границу области устойчивости $a_0 = a_0(\sigma)$, $\Omega = \Omega(\sigma)$, где

$$R_c(\sigma) = \int_{-\infty}^{0} R(\tau)\cos(\sigma\tau)d\tau,$$
$$R_s(\sigma) = \int_{-\infty}^{0} R(\tau)\sin(\sigma\tau)d\tau$$

– составляющие комплексного модуля упругости материала ротора, который определяется экспериментально.

Граница области устойчивости нулевого решения (1)–(3), определяемая (5), носит достаточно сложный характер. При изменении Ω зоны устойчивости и неустойчивости в зависимости от величины a_0 могут чередоваться. Потеря устойчивости нулевого решения (1)–(3) может происходить по одной либо по двум собственным формам оператора B. При этом частоты собственных форм колебаний могут находиться в окрестности резонансных соотношений.

Потеря устойчивости нулевого решения начально-краевой задачи (1)–(3) приводит к образованию автоколебательных решений, анализ которых проводится посредством теории бифуркаций с использованием метода инвариантных многообразий, позволяющего свести исследование поведения решений начально-краевой задачи (1)–(3) к исследованию решений некоторой конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение решений на устойчивом критическом инвариантном многообразии. Размерность критического многообразия определяется характером потери устойчивости нулевого решения начально-краевой задачи (1)–(3). Предложен эффективный алгоритм построения обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение траекторий на инвариантном многообразии. Уравнения строятся в нормализованном виде и получили название нормальной формы начально-краевой задачи (1)–(3). В случае потери устойчивости по одной форме инвариантное многообразие становится двухмерным, в случае потери устойчивости по двум формам – четырехмерным. В первом случае автоколебательными решениями могут быть только периодические решения, которые в рассматриваемой задаче являются прямой асинхронной прецессией. Для такого решения получена эффективная аналитическая формула. Во втором случае автоколебательными решениями могут быть как периодические решения (прецессии), так и двухчастотные решения (режимы биения). Для тех и других получены эффективные асимптотические формулы. Отметим, что внутренние резонансы между частотами колебаний собственных форм в случае идеального ротора не оказывают влияния на характер автоколебательных решений. Это обусловлено симметрией нелинейностей в уравнении (1). В случае неидеального ротора, автоматически приводящего к появлению асимметрии в уравнении (1), наличие внутренних резонансов между частотами колебаний собственных форм, по которым происходит потеря устойчивости, может приводить к образованию хаотических колебательных решений (странных аттракторов). Приведены примеры возникновения хаотических аттракторов, для которых вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность.

Рассмотрен случай, когда одна из опор ротора испытывает периодическую вибрацию. В этом случае второе краевое условие в (2) примет вид:

$$(b(|u_{ss}|^2)u_{ss} -$$
$$-\int_{-\infty}^{0} R(\tau)\exp(-i\Omega\tau)b(|u_{ss}(s,t+\tau)|^2)\times$$
$$\times u_{ss}(s,t+s)d\tau)\big|_{s=1} = \nu_1\exp(i(\omega t + \gamma_1)),$$
$$(b(|u_{ss}|^2)u_{ss} -$$
$$-\int_{-\infty}^{0} R(\tau)\exp(-i\Omega\tau)b(|u_{ss}(s,t+\tau)|^2)\times$$
$$\times u_{ss}(s,t+s)d\tau)_s\big|_{s=1} = \nu_2\exp(i(\omega t + \gamma_2)).$$

Здесь ν_j, γ_j ($j = 1, 2$), ω – соответственно амплитуды, фазы и частота периодических изгибающего момента и внешней силы. Для рассматриваемого случая выявлены условия возникновения хаотических колебательных режимов, для которых получены различные численные характеристики.

Обсуждается вопрос построения уравнений изгибных колебаний распределенного ротора в рамках гипотез Тимошенко, учитывающих инерцию поворота и сдвиговую деформацию сечений ротора.

VIBRATIONS OF A DISTRIBUTED ROTOR MADE OF A MATERIAL WITH NONLINEAR HEREDITARY PROPERTIES

E.P. Kubyshkin

Vibration modes of a distributed homogeneous rotating rotor made of a material with nonlinear-hereditary properties arising from the loss of stability of the equilibrium position are analyzed. The possibility of a periodic precession of two-frequency and chaotic oscillations is demonstrated.

Keywords: distributed rotor, stability, nonlinear oscillations.