

УДК 534.1

**О МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФРОНТАХ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД**

© 2011 г.

А.Г. Куликовский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

kulik@mi.ras.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматриваются сильные разрывы в решениях нелинейных гиперболических систем уравнений механики сплошной среды. Предполагается наличие потока массы через фронт разрыва. Если число граничных условий, обязательных для выполнения на разрыве (следующих из законов сохранения или из других законов и предположений), меньше числа неизвестных в системе уравнений, описывающих состояние и движение среды за разрывом, то при распространении разрыва по заданному неподвижному состоянию среды множество возможных состояний за разрывом (ударная адиабата) может зависеть от более чем одного параметра. Такие разрывы будем называть многопараметрическими. Число параметров, от которых зависит возможное состояние за разрывом, могут уменьшить «дополнительные» граничные условия, возникающие как условия, обеспечивающие существование решения задачи о структуре разрыва. Эти дополнительные граничные условия зависят от мелкомасштабных процессов, происходящих внутри структуры, для описания которых в гиперболические уравнения должны быть введены соответствующие этим процессам члены.

Известными ранее многопараметрическими разрывами являются фронты фазовых переходов, когда по разные стороны от разрыва среда описывается разными уравнениями, а также фронты, на которых на среду оказывается внешнее воздействие.

Высказывается точка зрения, что многопараметрические разрывы – один из случаев общего положения в механике сплошных сред. Рассмотрены два примера систем уравнений, относящихся к механике деформируемого твердого тела, когда возникают многопараметрические разрывы, изучена их структура и рассмотрены задачи, в которых такие разрывы возникают. Первый из примеров описывает вариант фазового превращения в виде образования нелинейно упругой среды Кельвина–Фойхта при уплотнении потока невзаимодействующих частиц. В другом примере представлен простейший случай, когда причиной образования многопараметрического разрыва является возникновение в разрыве остаточных деформаций.

Ключевые слова: сильные разрывы, условие эволюционности разрыва, структура разрыва, основные и дополнительные условия на разрыве, нелинейно упругая среда, упругопластическая среда, остаточные деформации.

Цель настоящего исследования – обратить внимание на то, что модели сред с многопараметрическими разрывами представляют собой один из случаев общего положения среди достаточно сложных моделей механики сплошной среды.

Такие разрывы могут иметь место в случае, когда число конечных соотношений, связывающих величины по обе стороны от разрыва и его скорость (следующих из законов сохранения и других законов и предположений), меньше числа величин, претерпевающих разрыв. Если считать, что только эти «основные» граничные условия выполняются на разрыве, то в указанном случае разрыв будет многопараметрическим. Однако требование существования структуры разрывов может привести к «дополнительным» граничным условиям. Эти дополнительные граничные условия зависят от процессов, происходящих внутри структуры, но их число определяется [1, 2] усло-

виями эволюционности. При принятых предположениях относительно структуры может оказаться, что многопараметрический разрыв не реализуется, поскольку представляет собой разрыв, не имеющий структуры.

Достаточно представительным типом ранее изученных многопараметрических разрывов являются фронты ионизации в магнитном поле [3]. Если на таких фронтах используются только основные граничные условия, то эти разрывы являются трехпараметрическими. Такого типа фронты, а также фронты с дополнительными условиями двухпараметрические и однопараметрические допускаются требованием существования структуры в случае, когда магнитное поле непараллельно фронту [4]. В случае когда магнитное поле параллельно фронту ионизации, возникают два дополнительных граничных условия, и фронты оказываются однопараметрическими [5]. Это свя-

зано с тем, что число свободных параметров, от которых зависит состояние за разрывом, не может превосходить числа различных типов малых возмущений, приходящих к разрыву сзади. В упомянутом случае фронтов ионизации с параллельным полем имеется одна такая характеристика.

В механике деформируемого твердого тела на разрыве должны выполняться соотношения, следующие из законов сохранения массы, энергии и импульса (три соотношения). Кроме того, из предположения о непрерывности перемещения на разрыве следуют еще три соотношения, связывающие изменение геометрической деформации среды с изменением скорости. Как известно [2, 6], в случае нелинейно упругого тела, когда напряжения выражаются через геометрическую деформацию и энтропию (или температуру), упомянутые соотношения соответствуют однопараметрическим разрывам (ударным волнам). Имеется два простых варианта для возникновения многопараметрических разрывов:

1) когда с одной из сторон от разрыва напряжения в среде (или касательные составляющие напряжений) не зависят от деформации (пылевидные или идеальные среды);

2) когда напряжения зависят от дополнительных параметров, изменяющихся в структуре разрыва согласно уравнениям, описывающим структуру. Пример второго варианта дают пластические среды, напряжения в которых зависят от упругих и пластических деформаций различного образом, причем в структуре разрыва происходит изменение и тех и других.

Приведены примеры ситуаций, когда возникают многопараметрические разрывы, представлена их структура и исследованы решения задач, в которых такие разрывы возникают.

В первом примере изучена задача об образовании несжимаемой нелинейной упруго-вязкой среды Кельвина–Фойхта в результате объединения невзаимодействующих частиц на фронте уплотнения (задача о напылении). При этом учитывается нелинейность образующейся среды и рассматриваются случаи, когда скорость фронта уп-

лотнения относительно образующейся среды может быть как больше, так и меньше скорости распространения малых поперечных возмущений в этой среде. Показано, что множество состояний за всевозможными разрывами (ударная адиабата) состоит из трехмерной и одномерной частей. Исследована «задача о поршне».

Второй пример относится к разрывам в анизотропной среде, в которой распространяется разрыв, причем считается, что возникающая продольная деформация является упругой, а поперечная деформация (сдвиг в направлении, параллельном фронту) сопровождается остаточной деформацией, скорость образования которой зависит от величины продольной деформации. Учитываются две компоненты скорости. Показано, что ударная адиабата (в данном случае – множество возможных скоростей за разрывом) содержит одномерные части (соответствующие чисто продольным и чисто поперечным ударным волнам) и двумерную область, соответствующую разрывам, в которых меняются обе компоненты скорости. Решение «задачи о поршне» может состоять из продольной и поперечной ударных волн, а может (в зависимости от скорости поршня) содержать один разрыв, в котором происходит требуемое задачей изменение обеих компонент скорости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №11-01-00034.

Список литературы

1. Куликовский А.Г. // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1125–1131.
2. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
3. Бармин А.А., Куликовский А.Г. // ДАН СССР. 1968. Т. 178, №1. С. 55–58.
4. Бармин А.А., Куликовский А.Г. // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 3. С. 495–499.
5. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 325 с.
6. Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

ON MULTIPARAMETRIC STRONG DISCONTINUITY FRONTS IN CONTINUOUS MEDIA

A.G. Kulikovskii

Strong discontinuities in solutions to nonlinear hyperbolic equation systems of continuum mechanics are considered. It is assumed that the mass flux through the discontinuity front is non-zero. If the number of boundary conditions that are to be observed on a discontinuity (which follow from conservation laws or other integral laws) is less than the number of unknown variables, then the discontinuity can be multiparametric. That implies that, if ahead of the discontinuity all the variables are known, then the state behind the discontinuity can depend on several parameters.

In contrast, shock waves in gases the combustion fronts are one-parametric and zero-parametric discontinuities, respectively. It is argued that multiparametric discontinuities represent one of the common types in continuum mechanics. Two examples

of problems of mechanics of deformable solids with multiparametric discontinuities arising in their analyses are considered. The structure of the discontinuities is considered and solutions of initial-boundary problems are constructed.

Keywords: strong discontinuity, evolutionary condition of discontinuity, structure of discontinuity, basic and additional conditions on discontinuity, nonlinear elastic medium, elastic-plastic medium, remaining deformations.