УДК 539.3

ОБ ИЗГИБЕ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Н.В. Курбатова, Е.С. Чумакова

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

nvk@math.sfedu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Построено численное решение задач изгиба естественно закрученного стержня (ЕЗС) с прямоугольным поперечным сечением методом конечных элементов, и на его основе исследовано его напряженно-деформированное состояние при произвольных значениях относительного угла закручивания – крутки. Исследованы зависимости жесткостей для различных параметров ЕЗС и выявлены особенности НДС для больших значений крутки.

Ключевые слова: естественно закрученный стержень, изгиб поперечной силой, метод конечных элементов, задача Сен-Венана.

На основе трехмерных уравнений теории упругости задача Сен-Венана для естественно закрученного стержня (ЕЗС) сводится к решению серии двумерных краевых задач на сечении стержня, которые описывают задачи растяжения–кручения и изгиба.

Модель ЕЗС и выражения основных соотношений теории упругости в сопутствующей системе координат приведены в [1]. С сечением стержня жестко связана подвижная система координат, две оси которой ξ_1 и ξ_2 совпадают с главными осями сечения, а третья ось ξ совпадает с осью стержня. Ограничимся тем, что приведем общий вид решений задач Сен-Венана об изгибе в виде линейной комбинации элементарных решений:

$$\mathbf{u} = \mathrm{Re}(C_1\mathbf{u}_1 + C_2\mathbf{u}_2 + C_3\mathbf{u}_3 + C_4\mathbf{u}_4). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{u}_1 = e^{i\tau\xi}\mathbf{a}_1$, $\mathbf{u}_2 = e^{i\tau\xi}(\xi\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ – элементарные решения, описывающие смещения ЕЗС как твердого целого; $\mathbf{u}_3 = e^{i\tau\xi}((\xi^2/2)\mathbf{a}_1 + \xi\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)$, $\mathbf{u}_4 = e^{i\tau\xi}((\xi^3/6)\mathbf{a}_1 + (\xi^2/2)\mathbf{a}_2 + \xi\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4)$ – элементарные решения задач Сен-Венана чистого изгиба и изгиба поперечной силой, соответственно; векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ составляют жорданову цепочку, отвечающую собственному значению $\gamma = i\tau$ спектральной задачи

$$\begin{aligned} L_\tau(\gamma)\mathbf{a} &= (\gamma^2 C\mathbf{a} + \gamma B_\tau\mathbf{a} + A_\tau\mathbf{a}), \\ M_\tau(\gamma)\mathbf{a} &= (\gamma G_\tau\mathbf{a} + E_\tau\mathbf{a})|_{\partial S} = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

при этом $\mathbf{a}_1 = (1,\ i,\ 0)^\perp$, $\mathbf{a}_2 = (0,\ 0,\ -\xi_1 - i\xi_2)^\perp$ – собственный и присоединенный векторы, а векторы $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ являются неизвестными присоединенными векторами, которые определяются на основе решений двумерных краевых задач чистого изгиба в случае $j = 3$ и изгиба поперечной силой при $j = 4$:

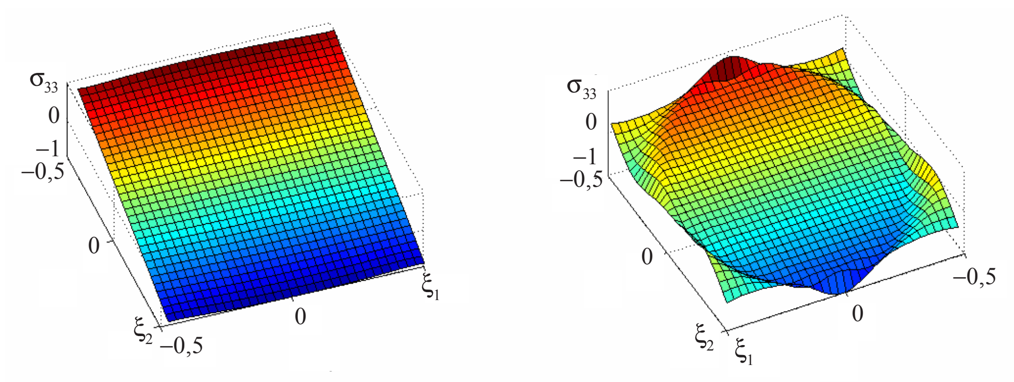
$$L_\tau(i\tau)\mathbf{a}_j = F_j,$$
$$M_\tau(i\tau)\mathbf{a}_j = f_j.$$

Выражения C, B_τ, A_τ, G_τ, E_τ, F_j, f_j соответствуют выражениям, представленным в [1].

В настоящем исследовании методом конечных элементов (МКЭ) строится решение краевой задачи, отвечающее задаче изгиба поперечной силой ($j=4$) и учитывающее предварительно построенное [2] конечно-элементное решение $\mathbf{a}_3$ задачи чистого изгиба.

Поскольку рассматриваемая задача является «задачей на спектре», т.е. соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, то для обеспечения единственности решение приходится строить не во всем гильбертовом пространстве, а на его подпространстве, ортогональном нетривиальному решению однородной задачи. В этом случае условия единственности удовлетворяется с помощью метода множителей Лагранжа в сочетании с МКЭ.

С другой стороны, необходимость учитывать построенное конечно-элементное решение задачи чистого изгиба на этапе построения численного решения задачи изгиба поперечной силой и комплекснозначность искомых решений, увеличивающая размерность задачи и порядок локальной системы, послужила причиной разработки авторской методики [3, 4] автоматизированной дискретизации таких вариационных уравнений, которые ввиду указанных обстоятельств имеют свою специфику.



а) *б*)

Рис 1. Распределение нормальных напряжений σ_{33} в сечении ЕЗС: *а*) $\tau = 0.22$, *б*) $\tau = 22$

В результате построения конечномерного аналога вариационного уравнения была получена система, решение которой ввиду плохой обусловленности строится методом сопряженных градиентов. На основе конечно-элементного решения были построены графики жесткостей в зависимости от τ – крутки для квадратных и вытянутых сечений, а также исследовано напряженно-деформированное состояние сечений стержня. Выявлено согласованное с незакрученным стержнем состояние ЕЗС для малых τ (рис. 1*а*), а в случае больших значений наблюдается изменение картины НДС, которое заключается в качественной схожести НДС незакрученного стержня, локализованной в круглой области, вписанной в сечение стержня (рис. 1*б*).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-01-00065а.

Список литературы

1. Устинов Ю.А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Наука, 2003. 128 с.

2. Курбатова Н.В., Романова Н.М. Конечно-элементное решение задачи изгиба для естественно-закрученного стержня // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды IX Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2005. Т. 1. С. 123–126.

3. Устинов Ю.А., Курбатова Н.В., Чумакова Е.С. Анализ основных характеристик естественно закрученного стержня в задаче Сен-Венана изгиба поперечной силой // Матер. VI Междунар. науч. конф. Донецк: Юго-Восток, 2010. С. 94–98.

4. Курбатова Н.В. Эффективные схемы конечно-элементной дискретизации // Современные проблемы механики сплошной среды: Матер. XIV Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. Т. 2. С. 189–193.

ON THE BENDING OF A NATURALLY TWISTED ROD BY A TRANSVERSE FORCE

N.V. Kurbatova, E.S. Chumakova

A finite-element solution of a bending problem has been constructed for a naturally twisted rod (NTR) of a rectangular cross section. The stressed-strained state and rigidity have been analyzed for various values of the relative twisting angle.

Keywords: naturally twisted rod, bending by transverse force, finite element method, Saint-Venant's problem.