УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАСТУЩИХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИН

А.Л. Левитин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

alex_lev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследуются вынужденные колебания растущих по толщине полигональных пластин, жестко закрепленных на опорном контуре. В качестве примера рассмотрена пятиугольная упругая пластина. Толщина пластины непрерывно увеличивается в результате притока материала извне. Полагается, что толщина растущей пластины изменяется во времени, но не зависит от пространственных координат. Кроме того, в процессе роста положение срединной поверхности не изменяется, т.е. наращивание пластины происходит симметрично на обеих лицевых поверхностях. В результате решения начально-краевой задачи определяется скорость изменения прогиба. Решения строятся в форме разложения по собственным функциям бигармонического оператора, заданного в пятиугольной области. Собственные функции и соответствующие им собственные значения определяются методом конечных элементов. Координатные функции выражаются через комбинации функций Бесселя. Значения прогибов определяются в результате интегрирования по времени полученного решения.

Ключевые слова: растущее тело, гиперупругость, пятиугольные пластины, прогиб, МКЭ.

Растущие тела – тела, к которым в процессе деформирования происходит приток массы извне [1]. В [2–4] исследованы случаи растущих пластин круглой формы, для которых задача может быть решена аналитически. В настоящем исследовании рассматривается пятиугольная пластина и для получения решения требуется численное нахождение собственных функций.

Начально-краевая задача для растущей по толщине жестко закрепленной на опорном контуре пластины формулируется следующим образом

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^2\nabla^2\dot{w}+\rho h\ddot{w}=\dot{q},\quad w\big|_\Gamma=\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_\Gamma=0,$$
$$w\big|_{t=0}=w_0(\mathbf{r}),\quad \dot{w}\big|_{t=0}=\mathrm{v}_0(\mathbf{r}),\tag{1}$$
$$\ddot{w}\big|_{t=0}=a_0(\mathbf{r}).$$

Здесь w – прогиб, $h=h(t)$ – переменная во времени толщина, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, $\dot{q}$ – скорость изменения поперечной нагрузки.

Замечание. В ряде случаев уравнение (1) может содержать слагаемые вида $\gamma\ddot{w}$, где γ – постоянная, характеризующая тормозящую силу, возникающую вследствие учета силы инерции присоединяемого материала в процессе роста. Далее будем считать процесс роста достаточно медленным и пренебрегать инерционностью присоединяемого материала, т.е. полагать $\gamma=0$.

Решение ищется в форме разложения

$$w(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}(\mathbf{r})b_{nm}(t),\tag{2}$$

где $a_{nm}=a_{nm}(\mathbf{r})$ – собственные функции бигармонического оператора $\nabla^2\nabla^2$, т.е. нетривиальные решения задачи Штурма–Лиувилля

$$\nabla^2\nabla^2 a_{nm}=\lambda_{nm}^4 a_{nm},\quad a_{nm}\big|_\Gamma=\frac{\partial a_{nm}}{\partial r}\bigg|_\Gamma=0.\tag{3}$$

Краевая задача (3) решается численно методом конечных элементов (для пластины постоянной толщины с цилиндрической жесткостью, равной 1). Получены собственные функции как перемещения узлов; в дальнейших вычислениях используется их интерполяция, представимая как $a_{nm}(\mathbf{r})$.

Координатные функции определяются из решения счетной последовательности задач Коши

$$Ah^2(t)\lambda_{nm}^4\dot{b}_{nm}+\dddot{b}_{nm}=\Phi_{nm},\quad A=\frac{E}{12(1-\nu^2)},\tag{4}$$

$$b_{nm}\big|_{t=0}=\Psi_{nm}^0,\quad \dot{b}_{nm}\big|_{t=0}=\Psi_{nm}^1,$$
$$\ddot{b}_{nm}\big|_{t=0}=\Psi_{nm}^2,\tag{5}$$

где

$$\Phi_{nm}=\int_\Omega a_{nm}(r,\varphi)\frac{\dot{q}(r,\varphi,t)}{\rho h(t)}d\Omega,$$
$$\Psi_{nm}^0=\int_\Omega a_{nm}(r,\varphi)\,w_0(r,\varphi)\,d\Omega,$$
$$\Psi_{nm}^1=\int_\Omega a_{nm}(r,\varphi)\,\mathrm{v}_0(r,\varphi)\,d\Omega,$$

$$\Psi_{nm}^2 = \int\limits_{\Omega} a_{nm}(r,\varphi)\, a_0(r,\varphi)\, d\Omega. \qquad (6)$$

Приведем некоторые численные результаты для пластины в форме правильного пятиугольника, вписанного в окружность $R = 1$ м (разбивка на линейные четырехугольные оболочечные элементы, материальные константы взяты для алюминия: $E = 68000$ МПа, $\nu = 0.36$, $\rho = 2700$ кг/м^3).

На рис. 1 показаны собственные формы, соответствующие первым трем собственным значениям бигармонического оператора (им отвечают следующие частоты собственных колебаний упругой пятиугольной пластины постоянной толщины: $f = 34.98$ Гц, $f = 73.65$ Гц, $f = 119.9$ Гц), и координатные функции $b_{nm}(t)$. Функции $b_{nm}(t)$ определяют движение растущей пластины, вызванное отклонением пластины от равновесного положения в момент начала наращивания.

Из анализа приведенных результатов следует, что с увеличением толщины $h(t)$ период колебаний возрастает, а амплитуда уменьшается.

Автор благодарен С.А. Лычеву за участие в постановке задачи, аналитическом исследовании, обсуждении полученных результатов.

Работа поддержана РФФИ (гранты №09-01-00270-а, 09-01-00343-а, 09-08-01194-а, 10-01-92653-ИНД_а), программой ОЭММПУ №13 и грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-3288.2010.1.

Список литературы

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.

2. Лычева Т.Н. Вынужденные колебания растущих по толщине упругих пластин // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XIV Междунар. конф. Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. С. 212–217.

3. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Finite deformations of accreted solids // Proceedings of XXXVIII Summer School-Conference APM2010. St.-Petersburg, 2010. P. 444–452.

4. Manzhirov A.V., Lycheva T.N. Bending of accreted solids // Book of Abstracts of the 37th Solid Mechanics Conference. Warsaw, Poland, September 6–10, 2010. Warsaw: IPPT, 2010. P. 316–317.

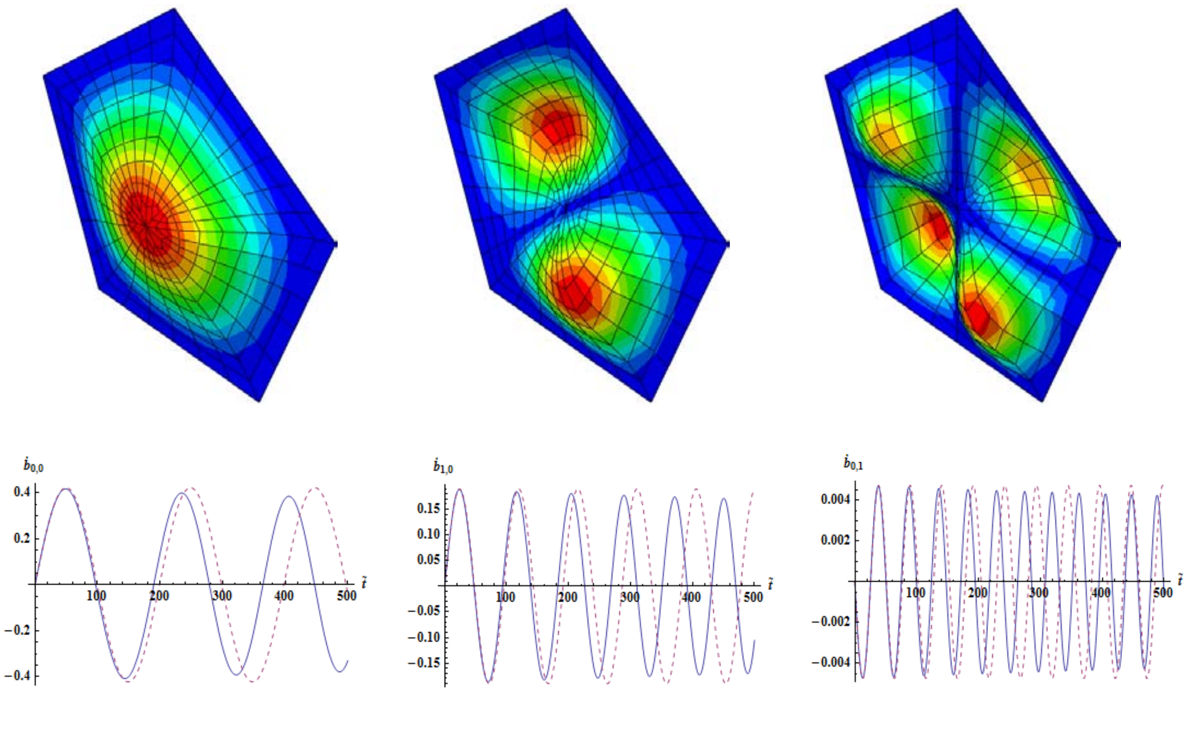

Рис. 1

FORCED VIBRATIONS OF GROWING POLYGONAL PLATES

A.L. Levitin

Forced vibrations of the growing in thickness polygonal plates rigidly fixed on the reference circuit are investigated. A pentagonal elastic plate is considered as an example. The plate thickness increases continuously as a result of influx of the material from the outside. It is believed that increasing the thickness of the plate varies with time, but does not depend on the spatial coordinates. In the process of growth the middle surface does not change, i. e., the plate growth is symmetrical on both the face surfaces. The rate of change of deflection is determined by solving the initial boundary value problem. Solutions are constructed in the form of expansions in eigen-functions of the bi-harmonic operator defined in the pentagonal region. The eigen-functions and the corresponding eigenvalues are determined by finite element method. The coordinate functions are expressed through a combination of Bessel functions. The values of the deflections are determined by time integration of the solution.

Keywords: growing body, hyperelastic, pentagonal plate, deflection, FEM.