

УДК 539.3

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ И ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

© 2011 г.

С.В. Лекомцев, С.А. Бочкарев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

bochkarev@icmm.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

С применением метода конечных элементов анализируются собственные колебания и устойчивость неподвижных или вращающихся круговых цилиндрических оболочек, взаимодействующих с вращающейся внутри них невязкой и сжимаемой жидкостью. Представлены результаты численных экспериментов, выполненных для оболочек с различными граничными условиями и геометрическими размерами.

*Ключевые слова:* классическая теория оболочек, вращающаяся цилиндрическая оболочка, вращающаяся потенциальная сжимаемая жидкость, метод конечных элементов, собственные колебания, устойчивость, флаттер.

В некоторых технических приложениях упругие тела взаимодействуют с потоком жидкости или газа, в котором наряду с осевой составляющей скорости присутствует также и окружная составляющая. При этом количество статей, в которых изучаются такие объекты, является незначительным. В [1, 2] представлено численно-аналитическое решение задачи только для бесконечно длинных оболочек, т.е. вопрос о влиянии граничных условий, задаваемых на торцах оболочек, на динамическое поведение системы остается неисследованным. Кроме этого, указанная задача никогда не решалась каким-либо численным методом. В настоящем исследовании численное решение задачи осуществляется с помощью полуаналитического варианта метода конечных элементов.

Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка длиной  $L$ , радиусом  $R$  и толщиной  $h$ . Оболочка является неподвижной или вращается относительно своей продольной оси с угловой скоростью  $\Omega_s$ . Внутри оболочки находится идеальная сжимаемая жидкость, которая вращается с угловой скоростью  $\Omega_f$ , равной, вообще говоря, угловой скорости вращения оболочки. В случае потенциального течения движение вращающейся жидкости описывается волновым уравнением [3]. Это уравнение совместно с условием непроницаемости и соответствующими граничными условиями сводится к системе уравнений с помощью метода Бубнова–Галеркина [4]. Для вывода уравнений движения вращающейся оболочки, описываемой в рамках классической теории, применяется уравнение Лагранжа, в котором в выра-

жении для работы, совершаемой гидродинамическими силами, используется уравнение Бернулли. Это позволяет получить связанную систему уравнений, которая в матричном виде может быть записана следующим образом:

$$(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M} + \rho_f [i^* \lambda \mathbf{C} + \mathbf{A}]) \{\mathbf{q} \ \boldsymbol{\phi}\}^T = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_s^g - \mathbf{K}_s^c & 0 \\ 0 & -\rho_f (\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_f^\omega) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s^\omega & \mathbf{C}_{sf}^T \\ \mathbf{C}_{sf} & \mathbf{C}_f^\omega \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{sf}^\omega \\ \mathbf{A}_{fs}^\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \sum_n \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS,$$

$$\mathbf{K}_f = \sum_m \int_{V_f} (\mathbf{F}_{,r}^T \mathbf{F}_{,r} + 1/r^2 \mathbf{F}_{,\theta}^T \mathbf{F}_{,\theta} + \mathbf{F}_{,x}^T \mathbf{F}_{,x}) dV,$$

$$\mathbf{K}_f^\omega = \sum_m \int_{V_f} \Omega_f^2 / c^2 [\mathbf{F}_{,\theta}^T \mathbf{F} - r \mathbf{F}_{,r}^T \mathbf{F}] dV,$$

$$\mathbf{M}_s = \sum_n \int_{S_s} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} dS, \quad \mathbf{M}_f = \sum_m \int_{V_f} 1/c^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV,$$

$$\mathbf{A}_{sf}^\omega = \sum_n \int_{S_\sigma} \Omega_s \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{F}_{,\theta} dS, \quad \mathbf{A}_{fs}^\omega = \sum_n \int_{S_\sigma} \Omega_f \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{F} dS,$$

$$\mathbf{C}_f^\omega = -\sum_m \int_{V_f} 2\Omega_f / c^2 \mathbf{F}_{,\theta}^T \mathbf{F} dV,$$

$$\mathbf{C}_s^\omega = \sum_n \int_{S_s} 2\rho_0 \Omega_s \mathbf{N}^T \Omega_2 \mathbf{N} dS,$$

$$C_{sf} = \sum_n \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{F} dS, \quad \mathbf{K}_s^g = \sum_n \int_{S_s} \mathbf{G}^T \sigma^0 \mathbf{G} dS,$$

$$\mathbf{K}_s^c = \sum_n \int_{S_s} \rho_0 \Omega_s^2 \mathbf{N}^T \Omega_1 \mathbf{N} dS, \quad \rho_0 = \int_h \rho_s dz.$$

Здесь  $(r, \theta, x)$ ,  $(s, \theta, z)$  – цилиндрическая и криволинейная системы координат;  $m, n$  – число конечных элементов, на которые разбиваются области жидкости  $V_f$  и оболочки  $V_s$ ;  $S_f, S_s$  – поверхности, ограничивающие объемы жидкости и оболочки;  $S_\sigma = S_f \cap S_s$ ;  $\rho_f$  и  $c$  – удельная плотность и скорость звука в газе;  $\rho_s$  – удельная плотность материала оболочки;  $\mathbf{B}$  – матрица связи вектора деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента;  $\mathbf{D}$  – матрица жесткостей;  $\mathbf{F}, \mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}}$  – функции формы для потенциала возмущения скорости, оболочечного элемента и нормальной составляющей вектора перемещения оболочки;  $\mathbf{q}, \phi$  – некоторые функции координат;  $i^* = \sqrt{-1}$ ;  $\lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2$  – характеристический показатель;  $\Omega_{123} = -1, \Omega_{132} = 1; \Omega_{222} = \Omega_{233} = 1$ ;  $\sigma^0$  – матрица предварительных усилий и моментов, компоненты которой определяются из решения осесимметричной статической задачи  $\mathbf{K}_s \mathbf{d} = \mathbf{f}$ , где  $\mathbf{f} = \{0 \ 0 \ \rho_0 R \Omega_s^2\}^T$  и  $\mathbf{d}$  – вектор обобщенных перемещений оболочки. Решение задачи сводится к вычислению и анализу собственных значений  $\lambda$  системы (1). Для вычисления комплексных собственных значений применяется алгоритм на основе метода Мюллера.

В численных примерах рассмотрены стационарные или вращающиеся оболочки с различными граничными условиями и геометрическими размерами, взаимодействующие с вращающейся внутри них жидкостью. Учет вращения жидкости приводит к расщеплению частот – на прямую (штриховая линия) и обратную (сплошная линия), которые соответствуют волнам, бегущим в разные стороны с различными скоростями. На рис. 1а

показано изменение действительных и мнимых (штрихпунктирная линия) частей двух первых ( $m$  – число полуволн в меридиональном направлении) собственных значений  $\lambda$  (Гц) от скорости вращения жидкости  $\Omega_f$  (об/с) для стационарной цилиндрической оболочки, свободно опертой с двух торцов. Возрастание скорости вращения жидкости приводит к увеличению собственных значений, соответствующих прямым волнам и уменьшению собственных значений, соответствующих обратным волнам. При определенной скорости вращения действительная часть обратной волны первой моды становится равной нулю и при дальнейшем увеличении скорости вращения она начинает возрастать. Действительные части обеих волн первой моды сливаются при скорости вращения  $\Omega_u$ . При этом происходит появление одинаковых и противоположных по знаку мнимых частей, что характеризует наступление потери устойчивости в виде флаттера. Аналогичная картина потери устойчивости наблюдается и при анализе оболочек, как жестко закрепленных на обоих торцах, так и консольно закрепленных.

На рис. 1б представлена зависимость двух первых собственных частот колебаний  $\lambda$  от скорости вращения  $\Omega$  для варианта расчета, когда оболочка и жидкость внутри нее вращаются с одной скоростью  $\Omega = \Omega_f = \Omega_s$ .

Учет вращения оболочки не оказывает существенного влияния на собственные частоты колебаний при малых скоростях вращения, но с увеличением скорости вращения собственные частоты изменяются таким образом, что потеря устойчивости не осуществляется. При решении задачи в упрощенной постановке, которая подразумевает исключение из (1) матрицы геометрической жесткости  $\mathbf{K}_s^g$ , потеря устойчивости также осуществляется в виде флаттера. Из этого следует, что начальные окружные усилия, вызванные

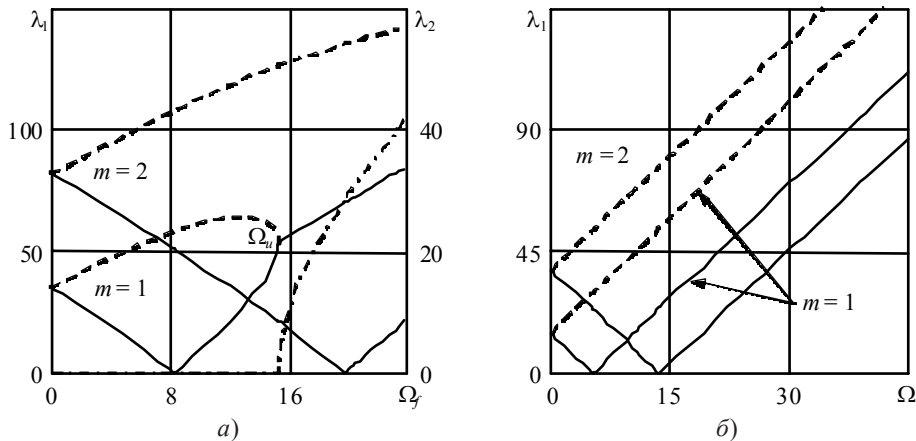


Рис. 1

центробежными силами, оказывают стабилизирующее влияние.

Работа выполнена при участии В.П. Матвеевко.

*Работа поддержана РФФИ, грант №09-01-00520.*

*Список литературы*

1. Lai Y.-C., Chow C.-Y. Stability of a rotating thin elastic tube containing a fluid flow // Zeitschrift für ange-

wand Mathematik und Mechanik, 1973. V. 53. P. 511–517.

2. Chen T.L.C., Bert C.W. Dynamic stability of isotropic or composite material cylindrical shells containing swirling fluid flow // J. Applied Mechanics. 1977. V. 44. P. 112–116.

3. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.

4. Бочкарев С.А., Матвеевко В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Изв. РАН. МТТ. 2008. №3. С. 189–199.

**NATURAL VIBRATIONS AND STABILITY OF A STATIONARY OR ROTATING CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL CONTAINING A ROTATING FLUID**

*S.V. Lekomtsev, S.A. Bochkarev*

The finite element method is applied to analyze natural vibrations of stationary or rotating circular cylindrical shells containing a co-rotating inviscid compressible fluid. The results of the numerical experiments for various boundary conditions and geometrical parameters are presented.

*Keywords:* classical theory of shells, rotating cylindrical shell, rotating potential compressible fluid, finite-element method, natural vibrations, stability, flutter.