УДК 534.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ОДНОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПО ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРОВСКОГО ТИПА

Е.Е. Лисенкова

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

EELissen@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследуется взаимообусловленное динамическое поведение пластины, лежащей на линейном упругом основании, и безотрывно движущегося по ней одномерного объекта. Получена постановка самосогласованной краевой задачи, которая корректно учитывает силы взаимодействия в движущемся контакте. Определены значения критических скоростей движения объекта, которые разделяют качественно возможные случаи волнообразования. Приводятся частотно-энергетические инварианты, характеризующие процесс взаимодействия волн с объектом. На основе точных решений проанализированы зависимости коэффициента преобразования энергии волн в энергию поступательного движения объекта от скорости последнего и частоты падающей волны.

Ключевые слова: колебания пластины, линейное упругое основание, движущийся объект, упругие волны.

Проблема взаимодействия волн с движущимися препятствиями давно привлекает внимание исследователей в различных областях науки [1]. Несмотря на столь широкий интерес, многие вопросы остаются недостаточно изученными. Причина этого кроется в трудностях, которые встречаются уже при постановке краевых задач. Успехи, достигнутые в последние годы [2–4], позволяют физически и математически корректно ставить задачи о согласованном взаимодействии двумерных и одномерных систем и, в частности, задачу о движении объекта вдоль двумерной системы под действием падающей на него волны. Исследование этой задачи интересно в связи с созданием машин и механизмов нового принципа действия, таких как, например, волновые транспортеры.

Рассмотрим колебания пластины, лежащей на упругом основании винклеровского типа, вдоль которой безотрывно движется по неизвестному закону $x = l(y, t)$ одномерный объект. Для лагранжиана пластины имеем выражение [5]: $\lambda = \{\rho u_t^2 - D((u_{xx}+u_{yy})^2 + 2(1-\nu)(u_{xy}^2 - u_{xx}\times u_{yy})) - \kappa u^2\}/2$, где ρ – поверхностная плотность, D – цилиндрическая жесткость, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, κ – коэффициент упругости основания, h – толщина, $u(x, y, t)$ – поперечное смещение пластины. Одномерный объект представляет собой балку, совершающую изгибные и крутильные колебания. Динамическое поведение пластины и движущегося вдоль нее объекта взаимообусловлены, а именно: характер колебаний пластины зависит от закона движения объекта, а движение последнего происходит как под действием внешних сил, так и сил реакции со стороны пластины. Постановку задачи можно получить, исходя из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского [2–4].

Изгибные колебания пластины определяются решением уравнения

$$\rho u_{tt} + D(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \kappa u = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющим на движущейся границе $x = l(y, t)$ условию непрерывности и отсутствия излома пластины

$$\begin{aligned} {}^0u &= u(l-0, y, t) = u(l+0, y, t), \\ {}^0\varphi &= u_x(l-0, y, t) = u_x(l+0, y, t), \end{aligned} \qquad (2)$$

уравнениям баланса изгибающих моментов и поперечных сил

$$\rho_0 I_0 {}^0\varphi_{tt}/F_0 - G_0 I_0 {}^0\varphi_{yy} = -[{}^1N]_{x=l(y,t)-0}^{x=l(y,t)+0} + Q, \qquad (3)$$

$$\rho_0 {}^0u_{tt} + E_0 I_x {}^0u_{yyyy} + \kappa_0 {}^0u = -[{}^2N]_{x=l(y,t)-0}^{x=l(y,t)+0} + P. \qquad (4)$$

Уравнение движения балки таково:

$$\rho_0 l_{tt} + E_0 I_z l_{yyyy} = -[\lambda - u_x {}^2N - u_{xx} {}^1N]_{x=l(y,t)-0}^{x=l(y,t)+0} + R. \qquad (5)$$

Здесь

$${}^1N = -D(u_{xx} + \nu u_{yy} - 2(1-\nu) l_y u_{xy} + l_y^2(\nu u_{xx} + u_{yy})),$$

$${}^2N = -\rho l_t u_t + D(u_{xxx} + (2-\nu) u_{xyy} - 2\nu l_y u_{xxy} -$$

$$-2l_y u_{yyy} - l_{yy}(u_{yy} + \nu u_{xx}) - l_y^2(u_{xyy} + \nu u_{xxx})),$$

квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин. Остальные обозначения приведены согласно [2]. При равномерном движении объекта $l_t(y,t) = V = \mathrm{const}$ (5) определяет внешнюю силу, необходимую для поддержания заданного закона движения

Пусть в пластине Кирхгофа, имеющей форму бесконечной полосы, падающая слева ($x < Vt$) волна частоты ω_0 волнового вектора $\mathbf{k} = (k_{0x}, k_{0y})$ взаимодействует с равномерно движущейся границей $x = Vt$. Частоты и волновые числа вторичных (отраженных и прошедших) волн удовлетворяют дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 - \alpha^2(k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega_*^2 = 0$$

$$(\alpha^2 = D/\rho,\ \omega_*^2 = \kappa/\rho) \qquad (6)$$

и кинематическим соотношениям [3, 4]:

$$\omega - k_x V = \omega_0 - k_{0x}V, \quad k_y = k_{0y} = n\pi/y_0 \quad (n \in Z). \qquad (7)$$

Из (6), (7) находятся выражения для частот и компонент волнового вектора вторичных волн [1], а из условия вырождения корней системы уравнений (6), (7) получаем выражения для критических скоростей:

$$V_{*1} = \left(\omega_0 - \sqrt{\alpha^2 k_{0y}^4 + \omega_*^2}\right)/k_{0x},$$

$$V_{*3} = 2\alpha^2 k_{0x}(k_{0x}^2 + k_{0y}^2)/\omega_0,$$

$$V_{*4} = \left(\omega_0 + \sqrt{\alpha^2 k_{0y}^4 + \omega_*^2}\right)/k_{0x},$$

$$V_{*2}^6/\alpha^6 - 2V_{*2}{}^4(3k_{0y}^2 + 7k_{0x}^2)/\alpha^4 + 36V_{*2}^3\omega_0 k_{0x}/\alpha^4 -$$
$$-V_{*2}^2(-12k_{0y}^4 + 12k_{0x}^4 + 16k_{0x}^2k_{0y}^2 + 27\omega_0^2/\alpha^2)/\alpha^2 +$$
$$+4V_{*2}k_{0x}\omega_0(9k_{0y}^2 + 5k_{0x}^2)/\alpha^2 -$$
$$-4(k_{0y}^2 + k_{0x}^2)^2(2k_{0y}^2 + k_{0x}^2) = 0.$$

Если $\omega_0 < \omega_{**} = \sqrt{\alpha^2 k_{0y}^4 + \omega_*^2}$, то волна в пластине не возбуждается, при $\omega_{**} < \omega_0 < \sqrt{2\omega_{**}(\omega_{**} + \alpha k_{0y}^2)}$ имеет место нормальная дисперсия, в противном случае – аномальная. Если объект движется со скоростью $V < V_{*2}$, то имеет место нормальный эффект Доплера и в системе возбуждается одна отраженная, одна прошедшая волны и две «приграничные» волны, экспоненциально спадающие по обе стороны от объекта. В случае $V > V_{*2}$ эффект Доплера проявляется аномальным образом, в результате чего число вторичных волн увеличивается вдвое. При движении объекта со скоростью, превышающей скорость V_{*3}, волна не может его догнать, взаимодействия не происходит.

Амплитуды вторичных волн и колебаний балки находятся из системы уравнений после подстановки решения в граничные условия (2)–(4). По полученным коэффициентам отражения и прохождения волн определяются динамические характеристики: силы взаимодействия пластины и движущегося объекта, силы давления волн, плотность энергии, работы внешних сил. При скоростях движения объекта $V < V_{*2}$, когда возникают отраженная (ω_1, k_{1x}) и прошедшая (ω_3, k_{3x}) волны, выполняются обобщенные законы сохранения энергии и волнового импульса $W_1/\omega_1 + W_3/\omega_3 = W_0/\omega_0$, $P_1/k_{1x} + P_3/k_{3x} = P_0/k_{0x}$.

В случае аномального эффекта Доплера обобщенные законы сохранения энергии и импульса не выполняются

$$\sum W_i/\omega_i \neq W_0/\omega_0, \quad \sum P_i/k_{ix} \neq P_0/k_{0x}.$$

Одной из технических характеристик машин и механизмов волнового принципа действия является коэффициент преобразования (КПД) энергии волн в энергию поступательного движения объекта. Определим его как отношение полезной мощности, под которой понимается мощность, расходуемая на движение объекта, к мощности, подводимой падающей волной. Наибольшего значения КПД достигает при движении объекта со скоростью $V = V_{*2}$. Для первой моды ($n = 1$) в случае нормальной дисперсии КПД не превышает 40%, а в случае аномальной не превышает 60%. При движении объекта со скоростью $V = V_{*3}$ КПД равен нулю.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-08-00188 и 09-08-00827).

Список литературы

1. Лисенкова Е.Е. Взаимодействие волн с объектом, равномерно движущимся вдоль двумерной упругой системы // Прикладная механика и технологии машиностроения. Н. Новгород: Изд-во об-ва «Интелсервис». 2004. С. 59–66.

2. Болдин В.П., Маланов С.Б., Уткин Г.А. Постановка краевых задач динамики двумерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 34–39.

3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001.

4. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. Н. Новгород: Наш Дом, 2010.

5. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. Т. 1 / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999.

INTERACTION OF WAVES WITH A ONE-DIMENSIONAL OBJECT MOVING OVER A PLATE SUPPORTED BY AN ELASTIC FOUNDATION OF THE WINKLER TYPE

E.E. Lisenkova

A one-dimensional object is considered that is moving along a flexibly supported plate. It is assumed that the object and the plate are always in contact. The interactive dynamical behavior of the object-plate system is investigated. A self-consistent boundary value problem is formulated, which correctly takes into account the forces of interaction in the moving contact. The critical velocities of the object that distinguish qualitatively different cases of wave-formation are determined. Frequency-energy invariants describing the process of interaction of waves with the object are given. The efficiency of conversion of the wave energy into that of the translation of the object along the plate is studied analytically. The dependence of this efficiency on the velocity velocity of the object and on the frequency of incident wave is analyzed based on the obtained exact solution.

Keywords: oscillations of a plate, linear elastic foundation, moving object, elastic waves.