Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2316–2317

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕЗАВИСИМОГО УПРАВЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ С ПОМОЩЬЮ СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В.А. Лохов, В.С. Туктамышев

Пермский государственный технический университет

valeriy.lokhov@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассмотрена концепция независимого управления напряженным и деформированным состояниями в системах с наложенными собственными (неупругими) деформациями. Показано, что декомпозиция собственной деформации на две части (первая создает напряжения, но не вызывает деформаций, а вторая, наоборот, создает деформации, не меняя напряжений) открывает возможность для решения таких задач.

Ключевые слова: создание заданных напряжений, создание заданных деформаций, функциональные пространства собственных деформаций.

Введение

Под независимым управлением полными деформациями (перемещениями) системы понимается создание с помощью собственных деформаций требуемого поля полных деформаций (перемещений), без воздействия на ее напряженное состояние. Вводится также понятие независимого управления напряжениями, обозначающее управление механическими напряжениями с сохранением изначальной конфигурации системы. Описанные задачи независимого управления особенно важны при проектировании интеллектуальных конструкций, которые способны адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации.

Термин «собственная деформация» (*eigenstrain*) [1, 2] основан на предположении, что в каждой точке деформируемого тела тензор геометрически линейной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ может быть представлен как сумма тензора упругой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ и тензора собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^*$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \tag{1}$$

где $\Omega \subset E^3$ – область пространства, занимаемая телом.

Упругая деформация связана с напряжением $\boldsymbol{\sigma}$ законом Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e + \mathbf{C}^{-1} \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{r} \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

где $\mathbf{C}^{-1}$ – тензор четвертого ранга упругой податливости, $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$, Γ – граница тела.

Природа собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ различна. Собственными деформациями могут быть температурные деформации, пластические деформации, деформации ползучести, деформации фазовых переходов, пьезоэлектрические деформации, а также деформации роста и перестройки живой ткани. В результате этого обобщения получены некоторые важные свойства напряжений и деформаций, которые не зависят от природы собственной деформации. Суть предположения заключается в том, что собственная деформация может быть вычислена независимо от решения краевой задачи теории упругости. Например, температурное поле, определяющее температурную деформацию, может быть найдено из независимого решения уравнения теплопроводности; электрическое напряжение, определяющее пьезоэлектрическую деформацию, также может быть задано независимо; деформации за счет эффекта памяти формы могут независимо задаваться и т.д. Поэтому собственная деформация в уравнениях краевой задачи считается известной.

Краевая задача для тела с собственными деформациями

Используется обобщенная (интегральная) постановка задачи, так как она применима для тел со сложной геометрией и позволяет реализовывать численные методы решения, например метод конечных элементов.

Назовем обобщенным решением задачи симметричный тензор $\boldsymbol{\sigma}$, который определяется обобщенным законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \tag{3}$$

где $\mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{r} \in \Gamma_u$ (Γ_u – закрепленная часть границы тела), и для которого работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) dV - \int_{\Gamma_e} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dS - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV = 0, \qquad (4)$$
$$\forall \mathbf{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_u.$$

Здесь W_2^1 – пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную и интегрируемых в квадрате вместе с первыми производными. Деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$ определяются геометрическими соотношениями Коши, где производные понимаются в обобщенном смысле. Значения перемещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ на границе вычисляются посредством оператора следа. В обобщенной постановке задачи считается, что

$$\mathbf{t} \in (L_2(\Gamma_\sigma))^3, \quad \mathbf{b} \in (L_2(\Omega))^3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* \in (L_2(\Omega))^6,$$

компоненты $C_{ijkl}\,(i,j,k,l = 1, 2, 3)$ являются кусочно-непрерывными функциями координат.

Задача независимого управления напряжениями или деформациями заключается в поиске собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, которая создает в системе заданные распределения напряжений или деформаций.

Декомпозиция собственной деформации

Собственная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ может быть специфичным образом распределена в теле так, что она не вызовет напряжений в системе [2]. Такое поле называют свободным от напряжений. Аналогично может быть распределение собственной деформации, не вызывающее деформаций (перемещений) тела (нильпотентная собственная деформация) [3].

В [4] доказывается фундаментальная теорема о декомпозиции собственной деформации, согласно которой любой тензор собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H$, существующей в теле, может быть единственным образом представлен как сумма свободной от напряжений $\boldsymbol{\varepsilon}_u^*$ и нильпотентной составляющих $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}_u^* + \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*. \qquad (5)$$

Данная теорема соответствует теореме об ортогональном разложении гильбертова пространства в функциональном анализе.

Ранее эта теорема использовалась для разложения пространства напряжений. Разложение пространства собственных деформаций позволяет установить важные свойства деформаций и собственных напряжений, вызванных собственной деформацией, а именно, если известны поля $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_u^*$, то:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{C}^{-1} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_u^*. \qquad (6)$$

Следовательно, определение свободной от напряжений и нильпотентной частей собственной деформации, существующей в теле, позволяет найти деформации и собственные напряжения системы не решая краевую задачу теории упругости с собственными деформациями.

Важно отметить, что разложение собственной деформации позволяет разделить и независимо решать задачи управления созданием в системе заданных напряжений и заданных деформаций (перемещений).

Заключение

Таким образом, если известно множество нильпотентных собственных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$, то можно решить задачу независимого управления напряжениями, то есть выбрать из этого множества элемент, который создаст оптимальное поле напряжений в рамках задачи (3), (4) и при этом не вызовет полной деформации системы. Аналогично можно построить алгоритм решения задачи независимого управления деформациями. Также представлены разработанные алгоритмы построения множеств собственных деформаций и приведены примеры решения задач.

Список литературы

1. Reissner H. // ZAMM. 1931. V. 11. P. 1–8.
2. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. 2nd ed. Kluwer, Dordrecht, 1991.
3. Irschik H., Ziegler F. // AIAA Journal. 2001. V. 39, No 10. P. 1985–1990.
4. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. V. 85, No 8. P. 557–570.

APPLICATION OF THE DECOMPOSITION METHOD TO INDEPENDENT STRESS AND DEFORMATION CONTOL BY EIGENSTRAINS

V.A. Lokhov, V.S. Tuktamishev

The paper considers the concept of independent stress and deformation control in the systems with imposed eigenstrains (inelastic strains). It was shown that the decomposition of eigenstrain into two parts (the first creates stress, but does not cause strain, and the second, on the contrary, creates a strain without changing the stresses) opens a possibility for solving such problems.

Keywords: creation of desired stress, creation of desired stress, function space of eigenstrains.