УДК 532.516+517.958:532.5

ДВИЖЕНИЕ КРОВИ В СОСУДАХ С МАЛЫМ НЕСИММЕТРИЧНЫМ И НЕСТАЦИОНАРНЫМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ СТЕНОК

А.Е. Медведев

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

medvedev@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

В гемодинамике особый интерес представляет исследование течений в кровеносных сосудах с такими патологическими изменениями кровеносного русла, как аневризма (локальное вздутие сосуда) или стеноз (локальное сужение сосуда). Изучение данных процессов существенно затруднено вследствие их нестационарности, обусловленной пульсирующим движением крови. Осесимметричные аналитические решения [1, 2] недостаточно точно описывают реальные процессы. Численное и экспериментальное моделирование [3] требует значительных затрат (течение трехмерное и нестационарное) и не всегда позволяет установить параметры, оказывающие влияние на рассматриваемый процесс. Возможно, ответы на некоторые вопросы, связанные с изучением особенностей течения крови в кровеносных сосудах (артериях и артериолах), дадут приближенные аналитические решения, полученные в [4, 5] и в настоящем исследовании.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, уравнения Навье–Стокса, аналитическое решение, течение Пуазейля.

Уравнения движения

Рассмотрим трехмерное нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) система уравнений имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}\right)=\\
=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right),\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}\right)=\\
=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\mu\left(\nabla^2 v+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{v}{r^2}\right),\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w,\\
\frac{\partial (ru)}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial (rw)}{\partial z}=0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

μ – коэффициент динамической вязкости; ρ – плотность; u, v и w – осевая, радиальная и угловая компоненты вектора скорости соответственно.

На стенке трубки ($r = r_w(t, \varphi, z)$) скорости жидкости равны скоростям стенки по нормали, по касательной и вдоль стенки:

$$u=\frac{\partial r_w}{\partial t},\quad v=\frac{\partial^2 r_w}{\partial t\partial \varphi},\quad w=\frac{\partial}{\partial t}\left(r_w\frac{\partial r_w}{\partial z}\right). \tag{2}$$

На оси трубки ($r = 0$) должны выполняться условия

$$u=v=0. \tag{3}$$

Приближение узкой трубки

При малых числах Рейнольдса и для узкой трубки, когда параметр $\kappa = r_0/\lambda$ мал (r_0 – радиус трубки, λ – характерная длина трубки), система уравнений (1) сводится к следующей:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}=-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\\
\frac{1}{\mu r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}-\frac{v}{r^2},\\
\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2},\\
\frac{\partial (ru)}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial (rw)}{\partial z}=0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Для деформации стенки, заданной законом $r_w(t, \varphi, z) = r_0[1 - \kappa/2\Phi(t, \varphi, z) + \kappa h(\varphi, z)]$, система уравнений (4) имеет решение

$$u(t,r,\varphi,z)=-\frac{\kappa}{2}\frac{r^3}{r_0^2}\frac{\partial \Phi(t,\varphi,z)}{\partial t},$$

$$v(t,r,\varphi,z) = -\frac{\kappa}{2}\frac{r^3}{r_0^2}\frac{\partial^2\Phi(t,\varphi,z)}{\partial\varphi\partial t},$$

$$w(t,r,\varphi,z) = -\kappa\frac{p_1(t)}{4\mu r_0}(r_0^2 - r^2),$$

$$p(t,r,\varphi,z) =$$

$$= p_1(t)\frac{\kappa}{r_0}z - \kappa\frac{2\mu r^2}{r_0^2}\frac{\partial\Phi(t,\varphi,z)}{\partial t} + p_3(t), \quad (5)$$

где $\Phi(t, \varphi, z) = [a_0 + a_1(t) + a_2(z)]\cos(2\varphi) - [b_0 + b_1(t) + b_2(z)]\sin(2\varphi)$; a_0 и b_0 – произвольные постоянные; $a_1(t)$, $a_2(z)$, $b_1(t)$, $b_2(z)$, $p_1(t)$, $p_3(t)$ и $h(\varphi, z)$ – произвольные функции.

Заключение

Рассмотрено течение вязкой несжимаемой жидкости в деформирующейся трубке. Для течения с малыми числами Рейнольдса в узкой длинной трубке (при условии малости деформирования стенок) получено решение нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса. Решение зависит от нестационарной деформации стенки трубки и пульсации давления. Как частный случай, найденное решение обобщает решение Пуазейля в эллиптических трубках при достаточно произвольном малом деформировании стенки по длине и углу. Найденные решения описывают течение крови в кровеносных сосудах с такими патологическими изменениями кровеносного русла, как аневризма (локальное вздутие сосуда) или стеноз (локальное сужение сосуда).

Работа выполнена при поддержке междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №91.

Список литературы

1. Регирер С.А. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. №4. С. 202–204.
2. Чесноков А.А. // ПМТФ. 2001. Т. 42, №4. С. 76–87.
3. Liou T.M., Liou S.N. // Proc. Nat. Sci. Council (China). Part B. 1999. Vol. 23, No 4. P. 133–148.
4. Medvedev A.E. // Intern. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Proc. Pt. 2. Novosibirsk, 2007. P. 115–122.
5. Медведев А.Е. // ПМТФ. 2009. Т. 50, №4. С. 28–32.

THE MOVEMENT OF BLOOD IN VESSELS WITH SMALL ASYMMETRIC AND NON-STATIONARY WALL DEFORMATION

A.E. Medvedev

In hemodynamics, of particular interest is the study of flows in the blood vessels with abnormal blood stream, such as aneurysm (bulging of the local vessel) or stenosis (narrowing of the local vessel). The study of these processes is considerably more difficult due to their non-stationarity because of the pulsed motion of blood. Axisymmetric analytical solutions [1, 2] do not accurately describe the real processes. Numerical and experimental modeling [3] is costly (as the flow is three-dimensional and unsteady), and it is not always possible to set parameters that influence the process in question. Perhaps, approximate solutions analytically obtained in [4, 5] and in this paper may answer some questions related to the study of the specific blood flow in blood vessels (arteries and arterioles).

Keywords: viscous incompressible fluid, Navier – Stokes equations, analytical solution, Poiseuille flow.