Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2352–2353

УДК 539.4

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ ИЗ МАТЕРИАЛА, СВОЙСТВА КОТОРОГО ЗАВИСЯТ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

А.М. Мельников

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

m_andrew_m@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассмотрена постановка задачи плоского напряженного состояния для тел с изменяющимися упругими свойствами, выведены соотношения для напряжений в случае гиперболичности системы дифференциальных уравнений равновесия и показано применение данной теории к решению задач о нахождении предельной нагрузки на примере задачи о растяжении полосы с угловыми вырезами.

Ключевые слова: плоское напряженное состояние, вид напряженного состояния, идеальная пластичность, предельная нагрузка.

Введение

Пластические свойства многих материалов зависят от вида напряженного состояния. Процесс пластического деформирования таких сред включает в себя не только процессы скольжения, но и образование или закрытие трещин, пор и других структурных дефектов, что, в свою очередь, приводит к необратимому изменению объема; поэтому предположение о пластической несжимаемости не может быть применено при рассмотрении таких материалов. В таких телах часто наблюдается взаимосвязь процессов сдвигового и объемного деформирования. К данным материалам неприменима гипотеза единой кривой. В [1] приведены примеры зависимостей характеристик напряженного состояния от деформаций для различных видов напряженного состояния для таких материалов, как углеродистая сталь и некоторые виды графитов, и предложен подход к описанию для них эффекта пластичности. В настоящем исследовании рассмотрено применение этой модели к задачам плоского напряженного состояния на примере задачи о растяжении полосы с угловыми вырезами и предложен метод расчета предельной нагрузки для этого случая.

Определяющие соотношения

Критерий пластичности изотропного материала в общем случае может быть представлен как функция от трех инвариантов тензора напряжений. Анализ экспериментальных данных [1] показывает, что влиянием третьего инварианта можно пренебречь; поэтому одной из возможных форм критерия пластичности может быть следующая:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k, \tag{1}$$

где $\sigma_0 = \sqrt{3/2 S_{ij} S_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений, $\sigma = \sigma_{ii}/3$ – среднее напряжение, $\xi = \sigma/\sigma_0$ – параметр вида напряженного состояния. Функция $f(\xi)$ является функцией материала и может быть найдена экспериментально при введении некоторых дополнительных предположений. Например, можно предположить, что $f(0) = 1$, что соответствует значению функции в случае чистого сдвига, и относительно данного значения функции и константы k находить остальные значения.

В условиях плоского напряженного состояния значение параметра ξ ограничено по модулю: $|\xi| \le 2/3$. В [2, 3] показано, что ξ является функцией среднего напряжения $S = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$, и представлены формулы, выражающие напряжения в пластической области через среднее напряжение и угол φ между осью Ox_1 и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение:

$$\sigma_{11} = S - kF(S)\sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = S + kF(S)\sin 2\varphi,$$
$$\sigma_{12} = kF(S)\cos 2\varphi, \tag{2}$$

где F является функцией параметра вида напряженного состояния ξ и, соответственно, среднего напряжения:

$$F(S) = \frac{\sqrt{1 - 9/4\xi^2(S)}}{f(\xi(S))\sqrt{3}}. \tag{3}$$

При $|kF'_S| < 1$ система уравнений равновесия для напряжений, определяемых формулой (2), является гиперболической. Вдоль ее характеристик выполняются равенства

$$\Omega(S) \mp 2\varphi = \text{const},$$
$$\Omega(S) = \int_0^S \frac{\sqrt{1-k^2F'^2}}{kF}\,dS. \qquad (4)$$

Углы между двумя семействами характеристик (α- и β-) определяются выражениями

$$\operatorname{tg}\varphi_{\alpha,\beta} = \operatorname{tg}(\varphi + \pi/4 \mp (\psi + \pi/4)),$$
$$\sin 2\psi = -kF', \quad \cos 2\psi = \sqrt{1-k^2F'^2}. \qquad (5)$$

Задача о растяжении полосы с угловыми вырезами

Рассмотрим задачу о растяжении полосы из идеально-жесткo-пластического материала с двумя симметричными угловыми вырезами величины 2δ. Построим поле характеристик, изображенное на рис. 1. В областях AOB и COD реализуется равномерное напряженное состояние. Напряжения в области AOB определяются из условия отсутствия напряжений на границе при помощи уравнений (2). Соединяющая их область BOC – веер α-характеристик. Соотношения вдоль β-характеристик подчиняются соотношениям (4), а их форма задается уравнениями

$$r = r_0\left(\frac{F(S(\alpha_0))\sqrt{1-k^2F'^2(S(\alpha_0))}}{F(S(\alpha))\sqrt{1-k^2F'^2(S(\alpha))}}\right)^{1/2}, \quad (6)$$

где (r, α) – полярная система координат, начало которой совпадает с вершиной веера характеристик, а угол наклона α-характеристик определяется уравнениями (5). Напряженное состояние в области COD определяется значениями напряжений, «принесенными» из области AOB веером характеристик. На рис. 1 приведен пример построения такого поля характеристик для функции $f(\xi) = 1 - \xi$ и угла выреза $2\delta = \pi/2$. В общем случае построение непрерывного поля характеристик возможно не всегда, однако при этом можно построить поле характеристик в виде шейки – области параболичности уравнений равновесия.

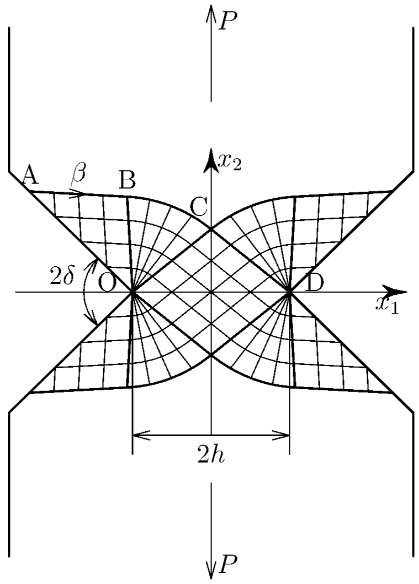

Рис. 1

Список литературы

1. Ломакин Е.В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. Экспериментальные зависимости и определяющие уравнения // Механика композитных материалов. 1998. №1. С. 3–9.

2. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. РАН. МТТ. 1991. №6. С. 58–68.

3. Ломакин Е.В., Мельников А.М. Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, №2. С. 48–64.

PLANE STRESS OF A STRIPE MADE OF A STRESS-STATE-DEPENDENT MATERIAL WITH ANGULAR CUTOUTS

A.M. Melnikov

Plane stress of stress-state dependent material is considered. Constitutive equations for stresses for a wide variety of the yield criteria are derived. Application of these equations in case of hyperbolic constitutive PDE's is demonstrated for the problem of calculating the ultimate load for a stripe with angular cutouts subjected to uniform tension.

Keywords: plane stress, stress state, perfect plasticity, limit load.