Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2357–2359

УДК 532.5: 539.3

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СТЕНОК ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИИ

Л.И. Могилевич[1], _Ю.Н. Кондратова_[2]

[1]Поволжский филиал Московского госуниверситета путей сообщения, Саратов
[2]Саратовский государственный технический университет

mogilevich@sgu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Поставлена и решена связанная задача гидроупругости трубы кольцевого сечения, состоящая из уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости и уравнений динамики внутренней и внешней упругих цилиндрических оболочек конечной длины, основанных на гипотезах Кирхгофа–Лява, с соответствующими граничными условиями при вибрации основания, к которому крепится кольцевая труба. Из решения этой задачи найдены параметры течения и упругие перемещения оболочек. Определены их амплитудные и фазовые частотные характеристики и резонансные частоты. Рассмотрены случаи свободного опирания и жесткого защемления оболочек по торцам и влияния типа закрепления и свойств жидкости на резонансные частоты и амплитудные частотные характеристики оболочек.

Ключевые слова: вязкая жидкость, труба кольцевого сечения, упругие соосные оболочки, вибрация.

1. Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе кольцевого сечения, образованного поверхностями упругих соосных цилиндрических оболочек. Внутренний R_1 и срединной поверхности $R^{(1)}$ радиусы внешней оболочки, а также внешний радиус R_2 и радиус срединной поверхности $R^{(2)}$ внутренней оболочки значительно больше ширины $\delta = R_1 - R_2$ цилиндрической щели кольцевого сечения. Толщины внешней $h_0^{(1)} = 2(R^{(1)} - R_1)$ и внутренней $h_0^{(2)} = 2(R_2 - R^{(2)})$ оболочек значительно меньше радиусов их срединных поверхностей $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$. Длины оболочек l_2 одинаковы, а упругие перемещения значительно меньше ширины δ цилиндрической щели. На кольцевую трубу действует переносное виброускорение.

2. Математическая модель трубы кольцевого сечения при воздействии вибрации состоит из уравнений Навье–Стокса и неразрывности для описания динамики жидкости и уравнений динамики упругих внутренней и внешней оболочек, которые для тонкого слоя жидкости ($\psi \ll 1$) в безразмерных переменных [1, 2] имеют вид:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \mathrm{Re}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)}\left(u_\xi \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta}\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \xi^2},$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)}\left(u_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta}\right)\right] = -\left(\frac{2R_2}{l_2}\right)^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2}\left\{\chi^{(i)} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \frac{1+\mu_0^{(i)}}{2}\chi^{(i)} v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} - \mu_0^{(i)} \chi^{(i)} w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta}\right\} = \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \tau^2};$$

$$\frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \times \left\{-\frac{1+\mu_0^{(i)}}{2}\chi^{(i)} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2}(\chi^{(i)})^2 v_m^{(i)} \times \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \theta} + (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \times \left[\frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + 2(1-\mu_0^{(i)})(\chi^{(i)})^2 \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2}\right] - (a_0^{(i)})^2 \times w_m^{(i)}\left[(2-\mu_0^{(i)})(\chi^{(i)})^2 \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \theta^3}\right]\right\} =$$

$$= \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2}\cos\theta - \frac{W_{1z1}}{\omega^2}\sin\theta + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \tau^2}\right),$$

$$\frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2}\left\{-\mu_0^{(i)}\chi^{(i)} u_m^{(i)} \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \zeta} + v_m^{(i)} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial \theta} - (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)}\left[(2-\mu_0^{(i)})(\chi^{(i)})^2 \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \theta^3}\right] + \right.$$

$$+w_m^{(i)}U_3^{(i)}+(a_0^{(i)})^2w_m^{(i)}\left[(\chi^{(i)})^4\frac{\partial^4U_3^{(i)}}{\partial\zeta^4}+2(\chi^{(i)})^2\times\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial^4U_3^{(i)}}{\partial\zeta^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^4U_3^{(i)}}{\partial\theta^4}\right]\right\}-\rho_0^{(i)}h_0^{(i)}\omega^2\left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2}\sin\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{W_{1z1}}{\omega^2}\cos\theta+w_m^{(i)}\frac{\partial^2U_3^{(i)}}{\partial\tau^2}\right)=(-1)^iq_n^{(i)}\Big|_{\xi=\xi_*^{(i)}},\quad(2)$$

где $E^{(i)}$ – модули Юнга материала оболочек, $\mu_0^{(i)}$ – коэффициенты Пуассона материала оболочек, $\rho_0^{(i)}$ – плотности материала оболочек, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к срединной поверхности верхней и нижней оболочек; $\bar{S}=-\bar{j}$ – единичный вектор в продольном направлении в срединных поверхностях оболочек, противоположный вектору $\bar{j}$; $\bar{n}_r$, $\bar{j}$ – единичные векторы полярной системы координат;

$$\xi=(r-R_2)/\delta,\quad\theta=\theta,\quad\tau=\omega t,\quad\zeta=2y/l_2,$$

$$V_r=w_m^{(i)}\omega u_\xi,\quad V_\theta=(w_m^{(i)}\omega/\psi)u_\theta,$$

$$V_y=(w_m^{(i)}\omega/\psi)\sigma u_\zeta;\quad\chi^{(i)}=l_2/(2R^{(i)}),$$

$$u_1^{(i)}=u_m^{(i)}U_1^{(i)},\quad u_2^{(i)}=v_m^{(i)}U_2^{(i)},$$

$$u_3^{(i)}=w_m^{(i)}U_3^{(i)},\quad\psi=\delta/R_2<<1,$$

$$\lambda^{(i)}=w_m^{(i)}/\delta;\quad\mathrm{Re}=\delta^2\omega/\nu,$$

$$(c^{(i)})^2=E^{(i)}/[\rho_0^{(i)}(1-(\mu_0^{(i)})^2)],$$

$$q_s^{(i)}=-[P_{ry}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_r)+$$

$$+P_{\theta y}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_\theta)+P_{yy}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{j})]\Big|_{r=r^{(i)}};$$

$$\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_r)=r^{(i)}/|\bar{N}|^{(i)},$$

$$(a_0^{(i)})^2=(h_0^{(i)})^2/(12(R^{(i)})^2),$$

$$q_\theta^{(i)}=[P_{r\theta}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_r)+P_{\theta\theta}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_\theta)+$$

$$+P_{\theta y}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{j})]\Big|_{r=r^{(i)}};$$

$$\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_\theta)=-1/|\bar{N}|^{(i)}\partial u_3^{(i)}/\partial\theta;\ r^{(1)}=R_2+\delta+u_3^{(1)};$$

$$q_n^{(i)}=[P_{rr}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_r)+P_{r\theta}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_\theta)+$$

$$+P_{ry}\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{j})]\Big|_{r=r^{(i)}};$$

$$\cos^{(i)}(\bar{n},\bar{n}_\theta)=-r^{(i)}/|\bar{N}|^{(i)}\partial u_3^{(i)}/\partial y;\ r^{(2)}=R_2+u_3^{(2)},$$

$$P_{rr}=-p+2\rho\nu\partial V_r/\partial r;\quad P_{yy}=-p+2\rho\nu\partial V_y/\partial y;$$

$$P_{ry}=\rho\nu(\partial V_y/\partial r+\partial V_r/\partial y),$$

$$P_{r\theta}=\rho\nu(\partial V_\theta/\partial r-V_\theta/r+1/r\,\partial V_r/\partial\theta);$$

$$P_{\theta\theta}=-p+2\rho\nu(1/r\partial V_\theta/\partial\theta+V_r/r);$$

$$P_{\theta y}=\rho\nu(\partial V_\theta/\partial y+1/r\partial V_y/\partial\theta);\quad|\bar{N}|^{\{i\}}=\{(r^{\{i\}})^2\times$$

$$\times[1+\partial u_3^{\{i\}}/\partial y]^2+(\partial u_3^{\{i\}}/\partial\theta)^2\}^{1/2};\quad i=1,2,$$

$$p=p_0+\rho R_2\frac{w_m^{(1)}\omega^2}{\psi\,\mathrm{Re}}\left\langle P-\mathrm{Re}\left[\frac{\psi E_z}{w_m^{(1)}}f''_{z0}(\tau)\cos\theta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi E_x}{w_m^{(1)}}f''_{x0}(\tau)\sin\theta\right]\right\rangle.$$

Граничные условия на непроницаемых поверхностях при $\psi\ll 1$ запишутся в виде:

$$u_\xi=\partial U_3^{(1)}/\partial\tau,\quad u_\theta=0;$$

$$u_\zeta=0\ \text{ при }\ \xi=\xi_*^{(1)}=1+\lambda^{(1)}U_3^{(1)};$$

$$u_\xi=w_m^{(2)}/w_m^{(1)}\partial U_3^{(2)}/\partial t;\quad u_\theta=0;$$

$$u_\zeta=0\ \text{ при }\ \xi=\xi_*^{(2)}=\lambda^{(2)}U_3^{(2)}.\quad(3)$$

Граничные условия для оболочек при $\psi\ll 1$ представляют собой условия либо свободного опирания, либо жесткого защемления на торцах и записываются в виде

$$\partial U_1^{(i)}/\partial\zeta=0,\quad U_2^{(i)}=0,\quad U_3^{(i)}=0,$$
$$\partial^2U_3^{(i)}/\partial\zeta^2=0\ \text{ при }\ \zeta=\pm1,\quad(4)$$

$$U_1^{(i)}=0,\quad U_2^{(i)}=0,\quad U_3^{(i)}=0,$$
$$\partial U_3^{(i)}/\partial\zeta=0\ \text{ при }\ \zeta=\pm1.\quad(5)$$

3. Полученная связанная задача гидроупругости решается методом возмущений малого параметра $\lambda^{(1)}$, характеризующего относительный прогиб внешней оболочки, при этом решение уравнений гидромеханики ищется в виде одночленного разложения $\lambda^{(1)}$. В результате решения уравнений динамики жидкости определены давление и компоненты вектора скорости жидкости.

Формы упругих перемещений для внутренней и внешней упругих оболочек для решения уравнений динамики оболочек выбираются в следующем виде:

– для граничных условий (4)

$$U_{10}^{(i)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sin c\pi\zeta\{(a_{10C}^{(i)}\cos\theta+$$

$$+a_{10S}^{(i)}\sin\theta)\sin(\tau+\varphi_{u1}^{(i)})+a_{10O}^{(i)}\},$$

$$U_{20}^{(i)}=\sum_{k=1}^{\infty}\cos c\pi\zeta\{a_{20S}^{(i)}\cos\theta+$$

$$+a_{20C}^{(i)}\sin\theta+a_{20O}^{(i)}\}\sin(\tau+\varphi_{u2}^{(i)}),\quad(6)$$

$$U_{30}^{(i)}=\sum_{k=1}^{\infty}\cos c\pi\zeta\{(a_{30C}^{(i)}\cos\theta+a_{30S}^{(i)}\sin\theta)\times$$

$$\times\sin(\tau+\varphi_{u3}^{(i)})+a_{30O}^{(i)}\},\quad c=(2k-1)/2,\quad i=1,2,$$

– или соответственно для граничных условий (5)

$$U_{10}^{(i)}=\zeta(1-\zeta^2)\{(a_{10C}^{(i)}\cos\theta+$$

$$+a_{10S}^{(i)}\sin\theta)\sin(\tau+\varphi_{u1}^{(i)})+a_{10O}^{(i)}\},$$

$$U_{20}^{(i)}=(1-\zeta^2)\{a_{20S}^{(i)}\cos\theta+$$

$$+a_{20C}^{(i)}\sin\theta+a_{20O}^{(i)}\}\sin(\tau+\varphi_{u2}^{(i)}),$$

$$U_{30}^{(i)}=(1-\zeta^2)^2\{(a_{30C}^{(i)}\cos\theta+a_{30S}^{(i)}\sin\theta)\times$$

$$\times \sin(\tau + \varphi_{u3}^{(i)}) + a_{30O}^{(i)}\}, \quad i = 1,2. \qquad (7)$$

В результате решения уравнений динамики внутренней и внешней оболочек получим прогибы каждой из оболочек и их амплитудные и фазовые частотные характеристики.

4. Проведено численное моделирование поведения амплитудных и частотных характеристик внутренней и внешней оболочек и давления в слое жидкости. Показано, что изменением размеров и типа закрепления оболочек можно сместить резонансные частоты внутренней и внешней оболочек цилиндрической трубы кольцевого профиля в необходимый диапазон частот, а также увеличить или уменьшить величины прогибов на резонансных частотах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-01-00177-а.

Список литературы

1. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. №3. С. 11–21.

2. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условиях вибрации // Вестник Саратовского гос. технич. ун-та. 2007. №3(27). Вып. 2. С. 15–23.

OSCILLATIONS OF ELASTIC WALLS OF A PIPE OF A RING CROSS-SECTION INTERACTING WITH A LIQUID UNDER THE ACTION OF VIBRATION

L.I. Mogilevich, Ju.N. Kondratova

A coupled problem of hydroelasticity of a pipe of the ring cross-section, consisting of dynamic equations of aviscous incompressible liquid and the dynamic equations of internal and external elastic cylindrical shells of final length based on the hypotheses of Kirchhoff–Love, is formulated and solved with the corresponding boundary conditions of the vibration of a foundation to which the pipe is fastened. From the solution of this problem, parameters of the flow and elastic displacements of shells are determined. Their amplitude and phase frequency characteristics and resonance frequencies are obtained. The cases of simply supported and rigidly clamped at the ends shells are analyzed, as well as the effects of the type of fixing and the properties of a fluid on the resonance frequencies and amplitude frequency characteristics of the shells.

*Keywords:*viscous fluid, pipe of ring cut, elastic coaxial envelopes, vibration.