Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2363–3465

УДК 532.5+517.9

О СВЯЗАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ И СВОБОДНО ПЛАВАЮЩЕГО ТЕЛА

О.В. Мотыгин, Н.Г. Кузнецов

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

o.v.motygin@gmail.com

Поступила в редакцию 24.08.2011

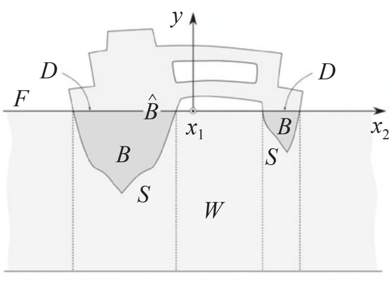
Изучается гармоническое по времени движение механической системы, состоящей из слоя жидкости и свободно плавающего тела, погруженного частично или полностью. Доказана конечность энергии рассматриваемой системы и установлено равенство кинетической и потенциальной компонент энергии. При некоторых ограничениях на геометрию тела доказано, что спектральная задача имеет только тривиальное решение, если частота гармонических колебаний достаточно велика. Получена оценка нижней границы интервала единственности.

Ключевые слова: гармонические волновые движения, свободно плавающее тело, спектральная задача, распределение энергии, единственность.

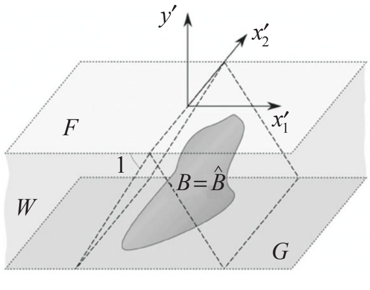
Постановка задачи

Единственной силой, которая учитывается при математическом моделировании изучаемой механической системы, является сила тяжести. Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая, а ее движение безвихревое; амплитуды движений всей системы малы и можно использовать линейную модель теории волн на воде, в которой все условия формулируются для области, отвечающей положению равновесия.

Обозначения для частично и полностью погруженного тела введены на рис. 1*а*, *б*.



а)



б)

Рис. 1

На этих рисунках (x_1, x_2, y) – прямоугольная система координат $[x = (x_1, x_2)]$, $\hat{B}$ – область, занятая телом, с центром масс в $(x^{(0)}, y^{(0)})$, B – погруженная часть, W – область, занятая жидкостью, S – смоченная поверхность тела (n – нормаль, направленная в B), $G = \{x \in \mathbf{R}^2, y = -h\}$ и $F = \partial W \setminus \overline{S}$ – дно и свободная поверхность соответственно; для частично погруженного тела $D = \{x \in \mathbf{R}^2, y = 0\} \setminus \overline{F}$.

Гармонические по времени колебания системы с частотой $\omega > 0$ описываются потенциалом скоростей и вектором трансляций и поворотов относительно $(x^{(0)}, y^{(0)})$ вида $\operatorname{Re}\{e^{-i\omega t}(\varphi(x, y), \chi)\}$, где $\varphi \in H^1_{\mathrm{loc}}(W)$ и $\chi \in \mathbf{C}^6$. Это приводит к следующей задаче (см. [1]):

$$\nabla^2\varphi = 0 \text{ в } W, \quad \partial_y\varphi - (\omega^2/g)\varphi = 0 \text{ на } F,$$
$$\partial_y\varphi = 0 \text{ на } G, \tag{1}$$
$$\partial_n\varphi = -i\omega n^{\mathrm{T}} D_0\chi \text{ на } S,$$

$$\omega^2 E\chi = -i\omega\int_S \varphi D_0^{\mathrm{T}} n\, ds + gK\chi, \tag{2}$$

$$\int_{W\cap\{|x|=a\}} |\partial_{|x|}\varphi - iv_0\varphi|^2\, ds = o(1) \text{ при } a \to \infty. \tag{3}$$

Здесь g – ускорение свободного падения, T означает транспонирование,

$$D_0 = D(x - x^{(0)}, y - y^{(0)}),$$

$$D(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 1 & -x_1 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix},$$

$$E = \rho_0^{-1} \int_{\hat{B}} \rho(x,y) D_0^{\mathrm{T}} D_0 dxdy,$$

где ρ_0 и ρ – плотности жидкости и тела соответственно;

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & K' \end{bmatrix},$$

$\mathbf{O}_3$ – нулевая матрица размера 3×3,

$$K' = \begin{bmatrix} I^D & I_2^D & -I_1^D \\ I_2^D & I_{22}^D + I_y^B & -I_{12}^D \\ -I_1^D & -I_{12}^D & I_{11}^D + I_y^B \end{bmatrix},$$

$$I^D = \int_D dx,\ I_y^B = \int_B (y - y^{(0)}) dxdy,\ I_i^D = \int_D (x_i - x_i^{(0)}) dx,$$

$$I_{ij}^D = \int_D (x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) dx, \quad i,j = 1,2;$$

v_0 – положительный корень уравнения

$$v_0 \operatorname{th}(v_0 h) = \frac{\omega^2}{g}.$$

Кроме того, для равновесия системы и устойчивости равновесия требуется выполнение условий:

$$\rho_0^{-1} \int_{\hat{B}} \rho(x,y) dxdy = \int_B dxdy$$

(закон Архимеда);

$$\int_B (x_i - x_i^{(0)}) dxdy = 0, \quad i = 1,2;$$

$I_y^B > 0$ и K' – положительно определенная матрица для полностью и частично погруженных тел соответственно.

Первые результаты, касающиеся вывода и обоснования данной математической модели (например теорема единственности для частично погруженного тела), были получены Джоном [2, 3] 60 лет назад. Только в 2010 г. появились новые строгие результаты, относящиеся к данной модели. Так, в работе [3] построены примеры нетривиальных решений для аналогичной двумерной задачи, а в [4] – существование таких решений доказано для родственной задачи о колебаниях свободно плавающего тела в канале с прямоугольным поперечным сечением.

Основные результаты

Конечность энергии. Известно, что для потенциала, удовлетворяющего условиям (1), (3), имеет место представление

$$\varphi(x,y) = A(\theta, y) |x|^{-1/2} e^{iv_0|x|} + r(x,y),$$

где $|r| + |\nabla r| = O(|x|^{-3/2})$ при $|x| \to \infty$. Нами доказано, что $A(\theta, y) = 0$, когда φ удовлетворяет задаче (1)–(3); это, в частности, гарантирует, что при движении жидкости кинетическая и потенциальная энергия конечны, т.е.

$$\int_W |\nabla\varphi|^2 \, dxdy < \infty, \quad \int_F |\varphi|^2 \, dx < \infty. \qquad (4)$$

Кроме того, установлено равенство кинетической и потенциальной энергии рассматриваемой системы жидкость–тело:

$$\int_W |\nabla\varphi|^2 \, dxdy + \omega^2 \overline{\chi}^{\mathrm{T}} E \chi = \frac{\omega^2}{g} \int_F |\varphi|^2 \, dx + g \overline{\chi}^{\mathrm{T}} K \chi.$$

В силу соотношений (4), задачу (1)–(3) можно рассматривать для $(\phi_1, \xi_1) = (\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\chi)$ и $(\phi_2, \xi_2) = (\operatorname{Im}\varphi, \operatorname{Re}\chi)$. При этом условия (2) приобретают вид:

$$\partial_n \phi_i = \omega n^{\mathrm{T}} D_0 \xi_i \text{ на } S,$$

$$\omega^2 E \xi_i = -\omega \int_S \phi_i D_0^{\mathrm{T}} n ds + g K \xi_i, \quad i = 1,2, \qquad (5)$$

причем $\omega > 0$ для (ϕ_1, ξ_1) и $\omega < 0$ для (ϕ_2, ξ_2).

Теоремы единственности. Первая из них несколько обобщает известную теорему Джона [3] для частично погруженного тела и ее формулировка такова.

Пусть выполнено условие Джона, т.е. любая вертикальная линия, проходящая через F, не имеет общих точек с S (см. рис. 1а). Тогда задача (1), (5) *имеет только тривиальное решение в пространстве $\mathbf{H}^1(W) \times \mathbf{R}^6$ при условии, что значение $|\omega|$ достаточно велико.*

Вторая теорема единственности (для полностью погруженного тела) является новой и доказывается при помощи интегрального тождества Мазьи в форме, предложенной в работе [5], а именно справедливо следующее утверждение.

Предположим, что существует система координат (x_1', x_2', y), полученная из исходной вращением и горизонтальным переносом, причем в новых координатах тело B содержится в призме

$$\{(r', \theta', x_2') : x_2' \in \mathbf{R}, \theta' \in (-\pi + 1, -1),$$
$$-h < r' \sin\theta' < 0\},$$

где (r', θ', x_2') таковы, что $x_1' = r' \cos\theta'$, $y = r' \sin\theta'$, а $\theta' \in (-\pi, 0)$ в области W (см. рис. 1б). Тогда задача (1), (5), *имеет только тривиальное решение в пространстве $\mathbf{H}^1(W) \times \mathbf{R}^6$ при условии, что значение $|\omega|$ достаточно велико.*

В формулировках обоих утверждений можно указать нижнюю границу значений $|\omega|$, для которых они справедливы. А именно, должно выполняться неравенство $\omega^2 \geq \lambda_*$, где $\lambda_* > 0$ – наибольшее из тех значений λ, для которых $\det(\lambda\mathbf{E} - g\mathbf{K}) = 0$.

Список литературы

1.Weck N. // Math. Meth. Appl. Sci. 1990. V. 12. P. 393–404.

2. John F. // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 13–57.

3. John F. // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 45–101.

4. Kuznetsov N. // Algebra & Analiz. 2010. V. 22, No 6. P. 185–199.

5. Nazarov S.A., Videman J.H. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 2010, submitted.

ON THE COUPLED TIME-HARMONIC MOTION OF FLUID AND A FREELY FLOATING BODY

O.V. Motygin, N.G. Kuznetsov

Time-harmonic motion of a mechanical system consisting of a water layer and a freely floating body (either surface-piercing or totally submerged) is studied. It is proved that the total energy of the water motion is finite and the equipartition of the energy of the whole system is established. Under certain restrictions on the geometry of the body, the problem is proved to have only a trivial solution for sufficiently large values of the frequency. The lower limit of the uniqueness frequencies are estimated.

Keywords: time-harmonic water waves, freely floating body, coupled spectral problem, equipartition of energy, uniqueness.