Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2366–2368

УДК 531.01

О ПРИНЦИПЕ ГАУССА. ОДНО ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ГАУССА

Р.П. Мошкин

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

rmoshkin@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Для нелинейных связей вводится понятие возможного перемещения так, чтобы одновременно сохранить и принцип Даламбера, и принцип Гаусса. Доказанное видоизменение принципа Гаусса позволяет расширить рамки обычно рассматриваемых механических систем путем привлечения из термодинамики принципа Карно. Предложенное видоизменение принципа Гаусса интересно видоизменением идеи Эрмана и Эйлера, которую развил Лагранж в своем изложении принципа динамики. Вопрос о механических системах с нелинейными связями – один из острых вопросов механики. С одной стороны, реальное существование таких связей неясно, а с другой стороны, два основных принципа аналитической динамики – принцип Даламбера и принцип Гаусса (по Аппелю и Делассю) – оказываются при этом несовместимыми. Аппель и Делассю рассматривали с различных точек зрения вопрос о движении такой системы, пытаясь дедуцировать основной принцип аналитической механики таких систем с линейными связями.

Ключевые слова: принцип Гаусса, видоизменение принципа Гаусса, нелинейные связи, возможное перемещение, принцип Даламбера, принцип Карно, механические системы.

Вообразим механическую систему, стесненную линейными гладкими связями. Обозначим через x_ν, y_ν, z_ν декартовы координаты точки M_ν с массой m_ν, а через X_ν, Y_ν, Z_ν – проекции действующих на эту точку сил ($\nu = 1, ..., n$).

В действительном движении точка M_ν имеет в момент времени t определенные координаты x_ν, y_ν, z_ν и скорости x'_ν, y'_ν, z'_ν. Движения, удовлетворяющие условиям наложенных на систему связей и условиям постоянства x_ν, y_ν, z_ν и x'_ν, y'_ν, z'_ν для момента t, Гаусс предложил называть мыслимыми. Действительное движение есть одно из мыслимых движений.

Рассмотрим некоторое мыслимое движение за время от t до $t + dt$. Выражение для работы действующих сил X_ν, Y_ν, Z_ν на элементарном перемещении мыслимого движения (μ)

$$\overset{\mu}{x}_\nu(t+dt) - x_\nu(t), \quad \overset{\mu}{y}_\nu(t+dt) - y_\nu(t),$$
$$\overset{\mu}{z}_\nu(t+dt) - z_\nu(t)$$

будет иметь вид

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left\{X_\nu\left[\overset{\mu}{x}_\nu(t+dt) - x_\nu(t)\right] + \right.$$
$$\left. + Y_\nu\left[\overset{\mu}{y}_\nu(t+dt) - y_\nu(t)\right] + Z_\nu\left[\overset{\mu}{z}_\nu(t+dt) - z_\nu(t)\right]\right\}.$$

Из этого выражения вычтем выражение работы механической системы при мыслимом движении в поле сил $m_\nu x''_\nu, m_\nu y''_\nu, m_\nu z''_\nu$, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы точки m_ν были совершенно свободными,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left\{m_\nu x''_\nu\left[\overset{\mu}{x}_\nu(t+dt) - x_\nu(t)\right] + \right.$$
$$+ m_\nu y''_\nu\left[\overset{\mu}{y}_\nu(t+dt) - y_\nu(t)\right] +$$
$$\left. + m_\nu z''_\nu\left[\overset{\mu}{z}_\nu(t+dt) - z_\nu(t)\right]\right\}.$$

В результате получим выражение

$$T_\mu = \sum_{\nu=1}^{n}\left\{(X_\nu - m_\nu x''_\nu)\left(x'_\nu dt + \overset{\mu}{x''_\nu}\frac{dt^2}{2}\right) + \right.$$
$$+ (Y_\nu - m_\nu y''_\nu)\left(y'_\nu dt + \overset{\mu}{y''_\nu}\frac{dt^2}{2}\right) +$$
$$\left. + (Z_\nu - m_\nu z''_\nu)\left(z'_\nu dt + \overset{\mu}{z''_\nu}\frac{dt^2}{2}\right)\right\},$$

представляющее работу на элементарном цикле, состоящем из прямого мыслимого движения в поле действующих сил и движения попятного (обратного) в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механическая система была совершенно свободной.

Для аналогичного цикла, построенного для действительного движения системы, имеем

$$T=\sum_{\nu=1}^{n}\left\{(X_\nu-m_\nu x''_\nu)\left(x'_\nu dt+x''_\nu\frac{dt^2}{2}\right)+\right.$$

$$+(Y_\nu-m_\nu y''_\nu)\left(y'_\nu dt+y''_\nu\frac{dt^2}{2}\right)+$$

$$\left.+(Z_\nu-m_\nu z''_\nu)\left(z'_\nu dt+z''_\nu\frac{dt^2}{2}\right)\right\}.$$

Отсюда, согласно гипотезе Гаусса о постоянстве x_ν, y_ν, z_ν, x'_ν, y'_ν, z'_ν для всей совокупности мыслимых движений в момент t, следует

$$T_\mu-T=\frac{dt^2}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{(X_\nu-m_\nu x''_\nu)\left(\overset{\mu}{x}{}''_\nu-x''_\nu\right)+\right.$$

$$\left.+(Y_\nu-m_\nu y''_\nu)\left(\overset{\mu}{y}{}''_\nu-y''_\nu\right)+(Z_\nu-m_\nu z''_\nu)\left(\overset{\mu}{z}{}''_\nu-z''_\nu\right)\right\}.$$

Если через Δ обозначить изменение при переходе от действительного движения к мало отличному мыслимому движению (μ)

$$\Delta\varphi=\overset{\mu}{\varphi}-\varphi$$

и если учесть, что для сил, зависящих от времени, от положения системы и от скоростей, имеют место соотношения $\Delta X_\nu=\Delta Y_\nu=\Delta Z_\nu=0$, то получим

$$\Delta T=-\frac{dt^2}{2}\Delta\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2m_\nu}[(X_\nu-m_\nu x''_\nu)^2+$$

$$+(Y_\nu-m_\nu y''_\nu)^2+(Z_\nu-m_\nu z''_\nu)^2].$$

Отсюда, согласно известному принципу Гаусса, непосредственно следует интересное соотношение $\Delta T=0$.

Другими словами, работа T является экстремумом T_μ, причем работа на цикле действительного движения T будет, очевидно, относительным (по меньшей мере) максимумом, так как

$$\Delta^2 T=-\frac{dt^2}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu[(\Delta x''_\nu)^2+(\Delta y''_\nu)^2+(\Delta z''_\nu)^2]<0.$$

Предложение о максимуме T для цикла, построенного на элементарном действительном движении, равносильно принципу Гаусса.

Доказанное видоизменение принципа Гаусса позволяет расширить характер обычно рассматриваемых механических систем путем привлечения из термодинамики принципа Карно (рис. 1).

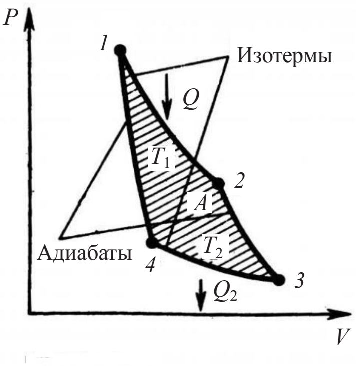

Рис. 1. Цикл Карно

С другой стороны, предложенное видоизменение принципа Гаусса интересно непосредственным видоизменением ижеи Эрмана и Эйлера, которую развил Лагранж в своем изложении принципа динамики.

Список литературы

1. Appell P. Sur les liasons exprimees par des relations non lineaires entre les vitesses // Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 1911. T. 152. P. 1197–1199.

2. Appell P. Exemple de mouvement d'un point assujetti a une liaison exprimee par une relation non lineaire entre les composantes de la vitesse // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1911. T. 32. P. 48–50.

3. Appell P. Sur les liaisons non lineaires par rapport aux vitesses // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1912. T. 33. P. 259–267.

4. Delassus E. Sur le realisation materielle des liaisons // Compt. rend. Acad. sci Paris. 1911. T. 152. P. 1739–1743.

5. Delassus E. Sur les liaisons non lineaires // Compt. rend. Acad. sci. Paris. 1911. T. 153. P. 626–628.

6. Delassus E. Sur les liaisons d'ordre quelconque des systemes materiels // Compt. rend. Acad. sci. Paris. 1912. T. 154. P. 964–967.

7. Delassus E. Sur les liaisons d'ordre mouvements des systemes materiels // Annales scientifiques de l'Ecole normale superieure. 1913. T. 30. P. 489.

8. Болотов Е.А. О принципе Гаусса // Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те. Серия 2. 1916. Т. 21, № 3. С. 99–152.

ON GAUSS PRINCIPLE. A VARIATION OF GAUSS PRINCIPLE

R.P. Moshkin

The article is aimed at introducing the concept of virtual displacement for non-linear connections with the purpose of keeping both the d'Alambert principle and the Gauss principle and showing one common assumption of dynamics. The proven variation of Gauss principle allows extending the nature of usually considered mechanical systems through the application of Carnot principle from thermodynamics. On the other hand, the proposed variation of Gauss principle is intriguing by direct modification of the Herman and Euler idea which was developed by Lagrange in his description of the dynamics principle. The subject of mechanical systems with non-linear connections is an acute problem in mechanics. On the one hand, the realness of such connections is not clear, and on the other hand, two basic principles of analytical dynamics – d'Alambert principle and Gauss principle (according to Appell and DeLassu) are proved to be incompatible in this case. Appell and DeLassu considered such system motion from different points of view following basically one idea, i.e. to deduce the basic principle of analytical mechanics of systems with linear connections.

Keywords: Gauss principle, a version of Gauss principle, non-linear connections, virtual displacement, d'Alambert principle, Carnot principle, mechanical systems.