

УДК 539.5

ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ БИНГАМА – ИЛЬЮШИНА В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 2011 г.

Л.В. Муравлева¹, Е.А. Муравлева²

¹Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

²Институт математики в прикладных науках им. М. Планка, Лейпциг (Германия)

lvmurav@gmail.com

Поступила в редакцию 24.08.2011

На основе вариационной постановки численно исследовано течение вязкопластической среды Бингама–Ильюшина в плоских каналах переменной ширины. Изучено влияние геометрии области и предела текучести на форму, размеры и расположение жестких зон. Отмечены неизвестные ранее качественные особенности течений. Численно исследована задача остановки течения вязкопластической среды в трубах различного поперечного сечения. При численном решении обнаружены неизвестные ранее качественные особенности – появление при остановке застойных зон, полностью или частично охватывающих контур границы, в зависимости от формы сечения канала.

Ключевые слова: вязкопластическая среда Бингама–Ильюшина, каналы переменной ширины, вариационные неравенства, численные методы.

Вязкопластическая среда Бингама–Ильюшина сочетает свойства вязкости и пластичности: если интенсивность напряжений ниже предела текучести, среда ведет себя как жесткое тело, выше этого предела – как несжимаемая нелинейная вязкая жидкость:

$$\sigma = -pI + \tau, \quad \begin{cases} \dot{\epsilon} = 0, & \|\tau\| \leq \sigma_s, \\ \tau = (\mu + \sigma_s / \|\dot{\epsilon}\|)\dot{\epsilon}, & \|\tau\| > \sigma_s. \end{cases}$$

Здесь σ_s – предел текучести, μ – вязкость, $\|\tau\| = \sqrt{\tau_{ij}\tau_{ij}}$ – интенсивность напряжений, $\|\dot{\epsilon}\| = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}$ – интенсивность скоростей деформации. Характерной особенностью в задачах о течениях данной среды является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей, разделяющей два типа движения среды: жесткие зоны и зоны деформируемого течения. Рассматривается вариационная постановка, заключающаяся в минимизации недифференцируемого функционала:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\dot{\epsilon}(v)\|^2 dx + \sigma_s \int_{\Omega} \|\dot{\epsilon}(v)\| dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Здесь v – функция, удовлетворяющая условию несжимаемости и главным граничным условиям. Данная постановка впервые была предложена А.А. Ильюшиным. В дальнейшем Дюво и Лионс сформулировали эквивалентную постановку в виде решения вариационного неравенства. Главная сложность при численном решении задачи вязкопластичности связана с недифференцируе-

мостью второго слагаемого. Одним из наиболее эффективных способов преодоления этой трудности является метод, основанный на вариационных неравенствах и множителях Лагранжа, предложенный в работах Гловинского, Фортена, Ле Галлека. Решение исходной задачи сводится к нахождению седловой точки следующего расширенного лагранжиана:

$$L_r(v; q; \eta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|q\|^2 dx + \sigma_s \int_{\Omega} \|q\| dx - \int_{\Omega} f v dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\dot{\epsilon}(v) - q) : \eta dx + \frac{r}{2} \int_{\Omega} \|\dot{\epsilon}(v) - q\|^2 dx$$

на основе итерационного процесса типа Узавы, который является обобщением схемы расщепления по физическим переменным. Обоснование алгоритма и детали его реализации на разностных схемах подробно изложены в [1].

Большой интерес представляют течения в областях с криволинейной границей. Рассматривались стационарные течения под действием перепада давления в плоских каналах переменной ширины: в конфузорах и диффузорах, в каналах с внезапным расширением, а также каналах с периодически меняющимися синусоидальными границами. Среда движется медленнее в широкой части канала (в силу несжимаемости среды). При внезапном расширении нарушается сплошность ядра: у входного отверстия в канал ядро уже и движется с большей скоростью по сравнению с ядром у выходного отверстия. Кроме того, за сту-

пеньками канала расположены застойные зоны. Для каналов с волнообразными границами возможно как существование непрерывного ядра течения переменной ширины, так и разрывного с отдельными «островками» ядра, периодически расположенными в самых широких и узких сечениях канала. При больших значениях предела текучести возникают застойные зоны, примыкающие к границе в наиболее широких сечениях. Исследована зависимость топологии жестких зон от внутренних параметров среды и геометрических характеристик границы. Проведено моделирование пульсирующих течений среды Бингама–Ильюшина в каналах с упругими и вязкоупругими стенками. Полученные решения сравнивались с аналогичным решением по квазиодномерной модели.

Качественные особенности стационарного течения в трубах различного поперечного сечения исследованы в работах П.П. Мосолова и В.П. Мясникова. Нестационарные течения вязкопластической среды исследованы значительно меньше, чем стационарные. Проведено численное моделирование нестационарных течений вязкопластической среды в трубах. Изучена зависимость времени остановки от внутренних параметров: плотности, вязкости, предела текучести и геометрии сечения. Полученные результаты хорошо согласуются с известными ранее теоретическими оценками для времени остановки. Важной составляющей решения является эволюция жестких зон. Численное решение выявило особенность расположения застойных зон, характерную именно для нестационарного течения. Так, в кольце, круге, квадрате, равностороннем треугольнике появляющиеся незадолго до остановки застойные зоны охватывают весь контур границы, для других областей застойные зоны выходят за критические кривые, ограничивающие застойные зоны в стационарном течении. Исследованы стационарные и нестационарные течения в некоторых областях

сложной формы (с криволинейной границей, входящими углами и т.д.).

Также рассматривались нестационарные течения между пластинами под действием переменного градиента давления и при движении одной из пластин; процессы установления и остановки вискозиметрических течений вязкопластической среды, находящейся в зазоре между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при вращении одной из поверхностей. Исследуется развитие вязкопластических течений с движением границ жесткого ядра и застойной зоны. Интересно, что при остановке течения между пластинами застойные зоны отсутствуют, а при остановке течения между цилиндрами – появляются рядом с внешними цилиндрами.

Работа частично поддержана РФФИ, гранты №08-01-00353, 09-01-00565.

Список литературы

1. Muravleva L.V., Muravleva E.A. Uzawa-like algorithm on semi-staggered grids for unsteady Bingham medium flows // *Rus. J. of Num. Anal. and Math. Modelling*. 2009. V. 24, No 6. P. 543–563.
2. Муравлева Е.А., Муравлева Л.В. Нестационарные течения вязкопластической среды в каналах // *Изв. РАН. МТТ*. 2009. №5. С. 164–188.
3. Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E. Numerical simulations of cessation flows of a Bingham plastic with the augmented Lagrangian method // *J. Non-Newtonian Fluid. Mech*. 2010. V. 165, No 9-10. P. 544–550.
4. Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E. Numerical simulations of unsteady circular Couette flow of a Bingham plastic with the Augmented Lagrangian Method // *Rheologica Acta*. 2010. V. 49, No 11-12. P. 1197–1206.
5. Муравлева Е.А., Муравлева Л.В. Течения вязкопластической среды Бингама–Ильюшина в каналах с волнообразными стенками // *Изв. РАН. МТТ*. 2011. №1. С. 59–64.

FLOWS OF BINGHAM–ILYUSHIN VISCOPLASTIC MEDIUM IN DOMAINS WITH COMPLEX GEOMETRY

L.V. Muravleva, E.A. Muravleva

A flow of Bingham–Ilyushin viscoplastic medium in plane channels of varying width is studied numerically, based on the variational formulation. The effect of the domain geometry and yield stress on the shape, size and location of rigid regions is studied. The earlier unknown qualitative characteristics of flows are described. The problem of stopping viscoplastic medium flows in pipes of various cross-sections is numerically investigated. The numerical analyses revealed a peculiar characteristic, namely, the appearance of stagnant zones during cessation that partly or completely, depending on the cross-section, surround the boundary contour.

Keywords: Bingham–Ilyushin viscoplastic medium, variable width channels, variational inequalities, numerical methods.