УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД С ПУСТОТАМИ И ПЬЕЗОУСТРОЙСТВ С ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

А.В. Наседкин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

nasedkin@math.sfedu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Для моделирования пористых пьезоэлектрических сред предложена математическая модель, обобщающая известную модель электроупругой среды с демпфирующими свойствами и модель Ковина – Нунзиато упругой среды с пустотами. В модели рассматриваются полевые функции механических перемещений, электрического потенциала и изменения пористости. На основе этой модели сформулированы постановки начально-краевых задач для пьезоэлектрических тел с пустотами. Получены обобщенные постановки континуальных задач в расширенной и редуцированных формах. Для численных решений использованы конечно-элементные аппроксимации и получены разрешающие конечно-элементные системы с симметричными седловыми матрицами. С использованием разработанной модели могут быть уточнены эффективные модули пористой пьезоэлектрической керамики. Эффективность предложенной модели и конечно-элементных аппроксимаций продемонстрирована на примере анализа фокусирующего сферического пьезоизлучателя из пористой пьезокерамики, нагруженного на акустическую среду.

Ключевые слова: электроупругость, пьезокомпозит, пустоты, теория Ковина – Нунзиато, связанные задачи, метод конечных элементов.

Промышленная пьезокерамика – это обычно в естественном состоянии пьезоэлектрический материал с небольшой долей пористости. Для уточненного описания поведения таких материалов можно использовать обобщение модели Ковина–Нунзиато упругой среды с пустотами [1] на случай пьезоэлектрических сред [2]. Для данной модели определяющие соотношения можно представить в форме [3]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B}\psi, \qquad (1)$$

$$\mathbf{D} + \varsigma_d \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e} \cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E} - \mathbf{g}\psi - \mathbf{G}\cdot\nabla\psi, \qquad (2)$$

$$\begin{gathered} \mathbf{h} = \mathbf{A}\cdot\nabla\psi + \mathbf{G}\cdot\mathbf{E}, \\ g = -\mathbf{B}\cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} + \gamma_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{g}\cdot\mathbf{E} - \xi\psi, \end{gathered} \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\mathbf{D}$ – вектор электрической индукции, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{h}$ – вектор потока пористости, g – плотность внутренних самоуравновешенных распределенных сил, ψ – функция изменения пористости, $\mathbf{c}^E$ – тензор упругих модулей, $\mathbf{e}$ – тензор пьезомодулей, $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ – тензор диэлектрических проницаемостей; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{G}$, ξ – константы, характеризующие изменение пористости; β_d, ζ_d, γ_d – константы демпфирования. Тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ и вектор $\mathbf{E}$ выражаются через вектор механических перемещений $\mathbf{u}$ и электрический потенциал φ по обычным формулам: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Замыкают систему дифференциальных уравнений пьезоэлектрического материала с пустотами полевые уравнения (уравнение движения, уравнение квазиэлектростатики и уравнение, описывающее изменение пористости материала), которые для медленных по сравнению со скоростью упругих волн процессов и в пренебрежении инерционными членами можно записать в виде:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho\,\dot{\mathbf{u}}, \qquad (4)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \sigma_\Omega, \qquad (5)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{h} + g + \rho l + \rho\dot{l} = 0, \qquad (6)$$

где $\mathbf{f}$ – вектор плотности массовых сил, σ_Ω – объемная плотность электрических зарядов, l – плотность внешних самоуравновешенных сил, α_d – дополнительная константа демпфирования.

Система (1)–(6) является связанной системой уравнений пьезоэлектрического материала с пустотами относительно вектора механических перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, функции электрического потенциала $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и функции изменения пористости $\psi(\mathbf{x}, t)$. Полная постановка начально-краевых задач пьезоэлектричества (электроупругости) включает в себя также соответствующие граничные условия и начальные условия для нестационарных задач. Постановку задачи можно также дополнить учетом нагрузок на акустическую среду [3] и на внешние электрические цепи.

Для решения соответствующих краевых или начально-краевых задач для реальных пьезоустройств широко применяется метод конечных элементов (МКЭ). Следуя классическим схемам МКЭ в полудискретной форме, аппроксимируем неизвестные полевые функции $\mathbf{u}$, φ и ψ на конечно-элементной сетке $\bigcup_m \Omega^{em} = \Omega_h \subseteq \Omega$ (Ω – область, занимаемая пьезоустройством):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}_u^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \\ \varphi_h(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}_\varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{\Phi}(t), \\ \psi_h(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}_\psi^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{\Psi}(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Psi}$ – узловые значения перемещений, электрического потенциала и изменений пористости соответственно, $\mathbf{N}_u^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_\varphi^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_\psi^T(\mathbf{x})$ – матрица и векторы базисных функций МКЭ.

Подстановка аппроксимаций МКЭ (7) в обобщенные (слабые) постановки задач пьезоэлектричества для тел с пустотами приводит к КЭ системам вида:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \\ &+ \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{\Phi} + \mathbf{K}_{u\psi} \cdot \mathbf{\Psi} = \mathbf{F}_u, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &-\mathbf{K}_{u\varphi}^T \cdot (\mathbf{U} + \varsigma_d \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \mathbf{\Phi} + \\ &+ \mathbf{K}_{\varphi\psi} \cdot \mathbf{\Psi} = \mathbf{F}_\varphi + \varsigma_d \dot{\mathbf{F}}_\varphi, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_{u\psi}^T \cdot (\mathbf{U} + \gamma_d \dot{\mathbf{U}}) - \mathbf{K}_{\varphi\psi}^T \cdot \mathbf{\Phi} + \\ &+ \mathbf{K}_{\psi\psi} \cdot \mathbf{\Psi} = \mathbf{F}_\psi + \gamma_d \dot{\mathbf{F}}_\psi, \end{aligned} \tag{10}$$

причем здесь исходные континуальные модели расширены за счет учета демпфирования в простейшей форме Рэлея: $\mathbf{C}_{uu} = \alpha_d \mathbf{M}_{uu} + \beta_d \mathbf{K}_{uu}$, где α_d, β_d – коэффициенты демпфирования.

В (8)–(10) выделены отдельные КЭ матрицы, отвечающие за механические (u), диэлектрические свойства (φ), свойства изменения пористости (ψ) и их связности.

Анализ особенностей учета демпфирования и других моделей учета затухания для КЭ задач пьезоэлектричества содержится в [3, 4], а обсуждение методов решения системы (8)–(10) с симметричными седловыми матрицами приводилось в [3] для задач пьезоэлектричества и в [5] для упругих сред с пустотами. Отметим также, что в [6–8] были подробно изучены математические свойства собственных частот и форм колебаний для пьезоэлектрических и упругих тел с пустотами при различных типах граничных условий, в том числе контактного механического и электрического типов, и установлены теоремы об изменении собственных частот при изменениях граничных условий.

С использованием модели Ковина – Нунзиато для тел с пустотами можно уточнить значения эффективных модулей пористой пьезоэлектрической керамики [8].

Эффективность описанной модели и конечно-элементных аппроксимаций проверена на примере анализа фокусирующего сферического пьезоизлучателя из пористой пьезокерамики, нагруженного на акустическую среду. С использованием конечно-элементной техники определены рабочие частоты электрического резонанса и антирезонанса толщинных колебаний, проведено уточнение предварительно рассчитанных эффективных модулей по обобщенной модели Ковина – Нунзиато и экспериментальным данным, вычислены амплитудно-частотные характеристики импеданса свободного и нагруженного пьезоизлучателя и определена фокальная зона при нагрузке на акустическую среду на резонансной частоте. Проведенные расчеты данного устройства показали эффективность предлагаемой модели.

Список литературы

1. Cowin S.C., Nunziato J.W. // J. Elasticity. 1983. V. 13. P. 125–147.
2. Ciarletta M., Scarpetta E. // Mech. Res. Commun. 1996. V. 23. P. 1–10.
3. Наседкин А.В. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы математической гидродинамики. 2009. С. 154–163.
4. Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. // ПММ. 2002. Т. 66, №3. С. 491–501.
5. Iovane G., Nasedkin A.V. // Computers and Structures. 2009. V. 87, No 15-16. P. 981–989.
6. Iovane G., Nasedkin A.V. // Computer and Mathematics with Applications. 2007. V. 53, No 5. P. 789–802.
7. Iovane G., Nasedkin A.V. // Applied Mathematical Modelling. 2010. V. 34, No 1. P. 60–71.
8. Iovane G., Nasedkin A.V. // Applied Mathematical Modelling. 2010. V. 34, No 1. P. 47–59.

MODELING PIEZOELECTRIC MATERIALS WITH VOIDS AND PIEZOELECTRIC DEVICES WITH ELEMENTS OF POROUS PIEZOCERAMICS

A.V. Nasedkin

To model piezoelectric porous materials, a new mathematical model is suggested which is a generalization of the model of the piezoelectric medium with damping properties and the Cowin – Nunziato model of elastic media with voids. In the new generalized Cowin – Nunziato model, the field functions of mechanical displacements, electric potential and function of the porosity change are considered. Based of this model, formulations of the generalized continual problems for piezoelectric bodies with voids or pores are obtained. For numerical analyses, obtained the finite element approximations and algorithms with symmetric saddle matrices are obtained. Using this model for piezoelectric bodies with voids or pores, the effective moduli of porous piezocomposite ceramics can be determined more precisely. The efficiency of the proposed model and finite-element approximations is verified by analyzing a focusing spherical device of porous piezoceramics emitting ultrasonic waves in a surrounding acoustic medium.

Keywords: piezoelectricity, piezocomposite, porous material, voids, Cowin–Nunziato theory, coupled problems, finite element analysis.