УДК 532.5

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ В ЧЕТЫРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

© 2011 г.

Н.В. Никитин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

nvnikitin@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Численно решаются 4-мерные уравнения Навье–Стокса в геометрии, соответствующей течению в плоском канале. Однородная четвертая координата вводится математически формально ортогонально трем другим, аналогично однородной боковой координате в 3-мерной геометрии. Показана неустойчивость 3-мерных «турбулентных» решений по отношению к 4-мерным малым возмущениям в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса от 4000 до 10000. Скорость роста малых возмущений оказывается универсальной величиной при нормировке на вязкие масштабы. Обнаружено, что устанавливающиеся в результате нелинейной эволюции «турбулентные» 4-мерные решения обладают существенно меньшим сопротивлением по сравнению с 3-мерными решениями. Падение сопротивления составляет 45% во всех рассмотренных случаях. Область существования 4-мерных решений сдвигается в сторону увеличения числа Рейнольдса до 4000 (от 1860 в 3-мерном случае). Таким образом, можно утверждать, что ламинарное течение Пуазейля в 4-мерном случае оказывается глобально более устойчивым, чем в 3-мерном.

Ключевые слова: уравнения Навье – Стокса, численное решение, турбулентное течение в канале, 4-мерное пространство.

Течение в плоском канале

Известно, что течение Пуазейля в плоском канале неустойчиво к малым возмущениям, периодическим в продольном направлении. Критическое число Рейнольдса Re, определенное через среднюю скорость и высоту канала, составляет 7696. Линейная неустойчивость в канале является субкритической, ответвляющиеся двумерные конечно-амплитудные решения имеют вид бегущей волны и существуют при уменьшении числа Рейнольдса до 4000. Двумерные волны, в свою очередь, неустойчивы к малым 3-мерным возмущениям, периодическим вдоль однородной боковой координаты. Возникающие в результате их нелинейной эволюции 3-мерные решения являются стохастическими по своему поведению. Средние и пульсационные характеристики таких решений близки к соответствующим характеристикам турбулентных течений, наблюдаемых в эксперименте. Есть все основания считать, что турбулентное течение в плоском канале описывается 3-мерными решениями уравнений Навье–Стокса. Будем называть такие решения *турбулентными решениями*. При уменьшении числа Рейнольдса турбулентные решения в плоском канале найдены численно вплоть до Re = 1860, что близко к экспериментальной границе существования турбулентности в плоском канале.

Таким образом, имеющиеся данные о свойствах решений уравнений Навье–Стокса для случая геометрии плоского канала свидетельствуют о том, что d-мерные решения для $d = 1, 2$ неустойчивы по отношению к малым $(d + 1)$-мерным возмущениям. Ответвляющиеся $(d + 1)$-мерные решения имеют более сложное пространственно-временное поведение и обладают большим сопротивлением. Есть основание полагать, что эта тенденция может быть продолжена на случай $d = 3$. Четвертая пространственная координата может быть формально введена математически ортогонально другим трем, аналогично однородной боковой координате. Следуя тенденции изменения свойств решений уравнений Навье–Стокса при увеличении размерности пространства от 1 до 3, можно ожидать неустойчивость 3-мерных турбулентных решений к малым 4-мерным возмущениям. Представляется весьма вероятным, что конечно-амплитудные 4-мерные турбулентные решения более сложные, чем 3-мерные, существуют при меньших числах Рейнольдса и обладают большим сопротивлением.

В настоящей работе численно исследуется устойчивость 3-мерных турбулентных решений уравнений Навье–Стокса для случая плоского канала по отношению к малым 4-мерным возмущениям и анализируются возникающие 4-мерные турбулентные решения.

Постановка задачи и метод решения

Аналогично традиционной постановке задачи прямого численного расчета турбулентного течения в плоском канале рассматриваются решения 4-мерных несжимаемых уравнений Навье – Стокса в области, ограниченной двумя параллельными плоскими стенками $x_2 = -h$ и $x_2 = +h$. На твердых стенках ставятся условия прилипания, в остальных направлениях – условия периодичности. Движение вызывается приложением градиента давления в направлении x_1. Периоды в направлениях x_3 и x_4 выбираются равными, так что задача симметрична относительно этих двух направлений.

Задача решается численно. Алгоритм включает в себя конечноразностные аппроксимации 2-го порядка в пространственных направлениях и полунеявную схему 3-го порядка интегрирования по времени. В целом, метод численного решения является непосредственным обобщением метода [1]. Вычисления проводились для трех чисел Рейнольдса: Re = 4000, 5600 и 10000. Всего было проведено 8 расчетов, включая варьирование расчетных сеток и размеров расчетной области (периодов) в однородных направлениях.

Результаты

Расчеты показали, что малые 4-мерные возмущения растут экспоненциально на фоне 3-мерных турбулентных решений. При нормировке времени на вязкие масштабы скорость роста оказывается одинаковой при всех числах Рейнольдса: $\lambda^+ = 0.016$, что меньше скорости роста малых 3-мерных возмущений $\lambda^+ = 0.021$, определенной ранее в [2, 3].

Обнаружено, что при Re = 5600 и 10000 нелинейное развитие возмущений приводит к установлению статистически стационарных турбулентных решений, характерной чертой которых является существенное (на 45%) понижение сопротивления по сравнению с 3-мерными решениями. При Re = 4000 эволюция приводит либо к установлению турбулентного решения с тем же пониженным сопротивлением, либо к полному затуханию колебаний и возвращению решения к ламинарному течению Пуазейля. Результат зависит как от начального условия, так и от деталей вычислительной сетки. Все это свидетельствует о близости Re = 4000 к минимальному значению, при котором могут сохраняться 4-мерные колебательные решения. Последнее подтверждается затуханием пульсаций при уменьшении числа Рейнольдса на 10% (до 3600) при начальных данных, взятых из установившегося турбулентного режима при Re = 4000.

Выводы

Численное решение 4-мерных уравнений Навье – Стокса показывает, что турбулентные 3-мерные решения в плоском канале неустойчивы по отношению к малым 4-мерным возмущениям. Таким образом, хаотический аттрактор, соответствующий этим решениям в 3-мерном случае трансформируется в седло с неустойчивым многообразием, направленным в 4-е измерение. Вопреки ожиданиям, что 4-мерные решения являются «более турбулентными», в частности, обладают большим сопротивлением и существуют при меньших числах Рейнольдса, чем 3-мерные решения, результаты расчетов свидетельствуют об обратном. Минимальное число Рейнольдса повышается с 1860 в 3-мерном случае до примерно 4000 в 4-мерном. Последнее говорит о том, что ламинарное течение Пуазейля глобально более устойчиво в четырех измерениях, чем в трех. Устанавливающиеся статистически стационарные 4-мерные решения характеризуются 45% снижением сопротивления, что обусловливается существенным снижением интенсивности нормальных к стенкам пульсаций скорости.

Вычисления проводились с использованием суперкомпьютерного комплекса МГУ «Чебышев».

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №08-01-00489-а).

Список литературы

1. Nikitin N. // J. Comput. Phys. 2006. V. 217. P. 759–781.
2. Nikitin N. // J. Fluid Mech. 2008. V. 614. P. 495–507.
3. Никитин Н.В. // МЖГ. 2009. №5. С. 27–32.

TURBULENT CHANNEL FLOW IN A 4-DIMENSIONAL SPACE

N.V. Nikitin

The 4-dimensional (4D) Navier – Stokes equations are solved numerically in the geometry corresponding to a plane channel. The instability of 3D turbulent solutions is shown with respect to small 4D perturbations in the considered Reynolds number range from 4000 to 10000. The rate of perturbation growth is a universal quantity when it is normalized by viscous scales. It is found that 4D turbulent solutions exhibit considerably lower wall friction compared with the corresponding 3D solutions. The drop in the viscous drag is about 45% in the all the considered cases. The existence domain of 4D solutions shifts towards higher Reynolds number up to about 4000 (from 1860 in the 3D case). Thus, laminar Poiseuile flow appeared to be globally more stable in the 4D space than in the 3D one.

Keywords: Navier–Stokes equations, direct numerical simulation, turbulent channel flow, 4-dimensional space.