Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2404–2406

УДК 539.3

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ СЖИМАЕМЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Н.В. Овчинникова, О.А. Киликовская

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

ovch-n@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследуется влияние упругой сжимаемости (величины коэффициента Пуассона) на напряженно-деформированное состояние тела из упругопластического материала в задаче о плоской деформации. Рассмотрены задачи о толстостенной трубе при совместном действии внутреннего и внешнего давления, о двухосном растяжении пространства при различном соотношении растягивающих усилий, о двухосном растяжении пространства с цилиндрической полостью (задача Л.А. Галина). При решении задач принимается, что материал подчиняется соотношениям теории пластического течения с изотропным упрочнением, критерию пластичности Мизеса, является идеально-пластическим или линейно упрочняемым. Для ряда задач получено аналитическое решение, в общем случае решение получено численно с помощью метода конечных элементов. Показано, что влияние упругой сжимаемости материала вопреки установившемуся мнению бывает существенным, а использование в постановке задач гипотез, принятых в литературе, не всегда оправдано.

Ключевые слова: плоская деформация, упругопластический материал, упругая сжимаемость, коэффициент Пуассона, метод конечных элементов.

В литературе роль упругой сжимаемости материала (величины коэффициента Пуассона ν) в постановке упругопластической задачи о плоской деформации недооценивается. Часто при аналитическом решении задач о плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$) влиянием сжимаемости пренебрегают явно, что позволяет существенно упростить решение; задачи решаются в предположении о несжимаемости материала, или, что то же самое, для осевого напряжения σ_z принимается (σ_1, σ_2 – главные напряжения в плоскости нагружения):

$$\sigma_z = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2), \qquad (1)$$

либо это происходит неявно, когда для сжимаемого материала ($\nu < 0.5$) принимают гипотезу о промежуточности положения σ_z относительно σ_1, σ_2 [1]:

$$\sigma_1 \le \sigma_z \le \sigma_2. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что максимальное касательное напряжение выражается только через напряжения σ_1, σ_2:

$$\tau_{\max} = 0.5\,|\,\sigma_1 - \sigma_2\,|. \qquad (3)$$

Тогда в постановке задачи условие пластичности Треска – Сен-Венана принимается в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \qquad (4)$$

В главных осях (4) имеет вид $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4k^2$.

На устоявшееся мнение о малом влиянии величины ν повлияло то, что сравнение численного решения для сжимаемого и аналитического для несжимаемого материалов было проведено для таких задач, где это влияние действительно оказалось незначительным. Это задача о трубе под действием только внутреннего давления [1, 2], задача об одноосном сжатии бруса в условиях плоской деформации [3] – опыт Бриджмена.

Однако проведенное численное решение задачи о двухосном растяжении бесконечного пространства с цилиндрическим отверстием при действии сил на бесконечности (задачи Л.А. Галина [4]) показало, что влияние сжимаемости существенно сказывается на размере пластической области (для сжимаемого материала она больше), а гипотеза (2) не всегда выполняется. Аналогичный вывод следует из решения задачи о толстостенной трубе при различных вариантах совместного действия внешнего и внутреннего давления [5, 6].

Для исследования влияния сжимаемости при различном соотношении между главными напряжениями в плоскости нагружения была рассмотрена однородная задача плоской деформации о двухосном растяжении пространства усилиями σ_x, σ_y. Принималось, что $\sigma_x = k\sigma_y$, где $-1 \le k \le 1$. Осевое напряжение и деформации определялись из решения задачи по уравнениям теории пластического течения и условию пластичности Мизеса, то есть без использования априорных гипотез (1), (2). В случае сжимаемых материалов даже такая простая задача решается аналитически только для идеально-пластического материала. В случае же упрочняющегося материала аналитическое решение получено для $k = \pm 1$, а для всех остальных значений $-1 < k < 1$ решение определено численно. Установлено, что решение исследуемой задачи зависит от ν всегда, кроме случая $k = -1$. Для части вариантов, особенно когда $k \le 0$, эта зависимость невелика, гипотеза (2) выполняется, и ради радикального упрощения задачи можно принять тело несжимаемым. Для вариантов, когда

$$k > \frac{\nu}{1-\nu}, \tag{5}$$

влияние коэффициента Пуассона значительно. Для сжимаемых материалов пластичность наступает раньше; при увеличении параметра нагружения отличается сам характер развития деформаций. На большей части пути нагружения гипотезы (1) и (2) не выполняются, и, следовательно, максимальное касательное напряжение не всегда лежит в плоскости нагружения. Практически невозможно получить решение для деформаций и σ_z для сжимаемого тела из решения, полученного для несжимаемого. Например, в случае $k = 1$ для $\nu = 0.5$ вообще не наступает пластичность, в то время как при $\nu \ne 0.5$ возникают пластические деформации, начиная с некоторого значения нагрузок.

Опыт Бриджмена отвечает случаю задачи при $k = 0$. Для неоднородных состояний к случаю $-1 \le k \le 0$, где $k = \sigma_r/\sigma_\theta$, близка задача об упругой трубе под действием только внутреннего давления. (Для упругого пространства с цилиндрической полостью под действием внутреннего давления для всех точек выполнено $k = -1$.) Численное решение показывает, что при дальнейшем нагружении гипотеза о промежуточности σ_z выполняется при $0 < \nu \le 0.5$ для всех точек упругопластической трубы. Размер пластической области не зависит от ν.

Если же в задаче о трубе давление приложено с внешней стороны, то в упругом состоянии для всех точек трубы выполняется $0 \le \sigma_r/\sigma_\theta \le 1$ (в осесимметричной задаче о растяжении упругого пространства с цилиндрической полостью, когда силы приложены на бесконечности, для большей части пространства выполнено $\sigma_r/\sigma_\theta \approx 1$). Кроме того, для упругой трубы (пространства) при $\nu < 0.5$ на части трубы не выполняется условие (2). Численное решение упругопластической задачи показывает, что влияние сжимаемости в этой задаче существенно, оно увеличивается с ростом параметра нагружения. Хотя напряжения σ_r, σ_θ для сжимаемого и несжимаемого материалов отличаются мало, осевое напряжение отличается настолько, что это сказывается на размере области пластичности. Так, например, в осесимметричной задаче о пространстве с цилиндрической полостью, растягиваемом на бесконечности, для одного и того же значения параметра нагружения радиус пластической области для $\nu = 0.5$ равен 2.71 радиусов отверстия, для $\nu = 0.3$ равен 3.25 (то есть на 20 процентов больше), для $\nu = 0.1$ область пластичности захватывает все пространство. Начиная с некоторой нагрузки, в пластической области, в том числе и на ее границе, гипотеза (2) не выполняется. Решение упругопластической задачи о двухосном растяжении пространства с цилиндрической полостью совпадает с решением Л.А. Галина [4], где в постановке задачи условие пластичности принимается в виде (4), только при $\nu \approx 0.5$.

В задаче о толстостенной трубе при совместном действии внутреннего и внешнего давления установлены значения ν, размера трубы и соотношения величин внутреннего и внешнего давления, при которых влияние сжимаемости будет мало, а при других – значительно. Показано, что минимальное отличие решений для сжимаемых и несжимаемых материалов наблюдается в задаче о внутреннем давлении, максимальное отличие – в случае равных величин внутреннего и внешнего давления ($k = 1$).

Отсюда следует, что выводы о малом влиянии коэффициента Пуассона, сделанные на основе опыта Бриджмена и задачи о трубе под действием внутреннего давления, не распространяются на общий случай задачи о плоской деформации. Влияние сжимаемости на напряженно-деформированное состояние может быть различным, в том числе весьма значительным. Для сжимаемого материала осевое напряжение, вопреки устоявшемуся мнению, не всегда является промежуточным главным напряжением. Поэтому учет величины осевого напряжения в условии пластичности Мизеса или в условии Треска необходим. Использование в постановке задачи для сжимаемых материалов условия пластичности Сен-Венана, выраженного только через напряжения в плоскости нагружения, не всегда правомерно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №11-08-00961.

Список литературы

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

2. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.:

Наука, 1966. 231 с.

3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

4. Галин Л.А. Плоская упругопластическая задача. Пластические области у круговых отверстий в пластинах и балках // ПММ. 1946. Т. 10, вып. 3. С. 367–386.

5. Киликовская О.А., Овчинникова Н.В., Пендюрина М.Н. О влиянии упругой сжимаемости и упрочнения материала на решение упругопластической задачи для толстостенной трубы под действием внутреннего или внешнего давления // Вестник Тульского гос. ун-та: Серия Математика. Механика. Информатика. Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. Т. 16, вып. 1. С. 72–87.

6. Киликовская О.А., Овчинникова Н.В., Пендюрина М.Н. Задача о толстостенной трубе из сжимаемого упругопластического материала при совместном действии внутреннего и внешнего давления // Упругость и неупругость: Матер. Междунар. научн. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 155–158.

ON FORMULATING A PLAIN-STRAIN PROBLEM FOR COMPRESSIBLE PLASTIC-ELASTIC MATERIALS

N.V. Ovchinnikova, O.A. Kilikovskaya

The influence of elastic compressibility (Poisson's ratio) on the stress-strain state of a plastic-elastic body in plane-strain problems is investigated. The problem of expansion of a thick-walled tube by internal and external pressures, the problem of expansion in the x and y directions of an infinite medium, when the relation between axial forces takes different values, and the problem of expansion in the x and y directions of an infinite medium with a cylindrical cavity (L.A. Galin's problem) are considered. It is assumed that the material is isotropic hardening with a constant rate of hardening or zero hardening. The von Mises yield criterion is used. For a number of problems analytic solutions are obtained; in most cases, the numerical solution is obtained by the finite element method. It is shown that, contrary to the established opinion, the influence of elastic compressibility may be important, and use of the hypotheses about the size of the axial stress accepted in the literature is not always justified.

Keywords: plain-strain, plastic-elastic material, elastic compressibility, Poisson's ratio, the method of finite elements.