Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2411–2413

УДК 539.3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ СЛОИСТО-СТРУКТУРИРОВАННЫХ СРЕД С ДЕФЕКТАМИ

А.В. Павлова, С.Е. Рубцов

Кубанский госуниверситет, Краснодар

pavlova@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Анализ напряженности разломно-блоковых структур литосферы приводит к исследованию задач для слоисто-блочных сред с множественными неоднородностями. Сложности изучения таких сред не удается преодолеть только путем применением современных вычислительных средств. Дифференциальный метод факторизации для краевых задач в сложных средах представляет собой обобщение метода интегральных преобразований и является удобным инструментом их исследования. На его основе предложен новый аналитический метод построения функциональных уравнений и систем интегральных уравнений для слоисто-структурированной среды с дефектами типа трещин.

Ключевые слова: дифференциальный метод факторизации, слоисто-блочная среда, трещины.

Общая схема дифференциального метода факторизации

Рассматривается краевая задача для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в частных производных в выпуклой трехмерной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, записанная в операторном виде:

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\ &\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Решение $\boldsymbol{\varphi}$ и заданные $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ принадлежат пространству медленно растущих функций $\mathbf{H}_s(\Omega)$. С помощью дифференциального метода факторизации задача решается в конечном виде, если Ω является полупространством. В случае выпуклой области Ω задача сводится к решению системы псевдодифференциальных уравнений меньшей размерности [1]. Вводятся локальные системы декартовых координат $\mathbf{x}^\nu = \{x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu\}$, $\nu = \overline{1, P_\Omega}$, где $O^\nu x_1^\nu$, $O^\nu x_2^\nu$ лежат в касательной плоскости к границе $\partial\Omega$, третья ось направлена по внешней нормали. Применением трехмерного преобразования Фурье V_3 задача (1) в локальной системе координат сводится к системе функциональных уравнений вида

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}^\nu)\boldsymbol{\Phi} = \iint_{\partial\Omega} \omega(\boldsymbol{\alpha}^\nu) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^\nu). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{K} = \|k_{nm}(\boldsymbol{\alpha}^\nu)\|$, $\boldsymbol{\alpha}^\nu = \{\alpha_i^\nu\}$ $(i = \overline{1,3})$ – полиномиальная матрица-функция в локальной системе координат с номером ν, $\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{V}_3\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{G} = \mathrm{V}_3\mathbf{g}$. Вектор внешних форм $\boldsymbol{\omega}$ имеет в качестве компонент значения решения $\boldsymbol{\varphi}$ и его нормальных производных на $\partial\Omega$, заданных граничными условиями, а также неизвестных. Неизвестные функции или их производные находятся из псевдодифференциальных уравнений, получаемых при преобразовании уравнений (2). Предполагается, что параметры α_1^ν, α_2^ν находятся на вещественной оси, а $\alpha_3^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)$ изменяется в комплексной плоскости. Осуществляя левостороннюю факторизацию $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}^\nu)$ по параметру α_3^ν в виде $\mathbf{K} = \mathbf{K}_+(\alpha_3^\nu)\mathbf{K}_-(\alpha_3^\nu)$, функциональное уравнение (2) можно представить как

$$\mathbf{K}_-(\alpha_3^\nu)\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_3^\nu)\left[\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{G}\right]. \tag{3}$$

Слева в соотношении (3) находится вектор-функция с компонентами, регулярными в области E_-. Теми же свойствами должна обладать вектор-функция, стоящая справа. Через E_+ обозначена область, содержащая все нули z_{j+}^ν $(\operatorname{Im} z_{j+}^\nu > 0)$ $\det \mathbf{K}$, через E_- – дополнение E_+ до всей плоскости. Требование равенства нулю проекции правой части как функции параметра α_3^ν на область E_+ приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} \lim_{\alpha_3^\nu \to z_{j-}^\nu} \mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_3^\nu)\left[\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{G}(\alpha_3^\nu)\right](\alpha_3^\nu - z_{j-}^\nu) = 0, \\ j = \overline{1, \widetilde{N}_-}, \ z_{j-}^\nu \text{ – нули } \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu) \ (\operatorname{Im} z_{j-}^\nu < 0). \end{gathered} \tag{4}$$

Метод факторизации в задаче для слоистой среды с трещинами

Слоистость – один из важнейших признаков, свойственный, в первую очередь, большинству осадочных горных пород. Первичное залегание слоев и пластов обычно является горизонтальным, поэтому слоистая упругая среда часто рассматривается в качестве модели геологической структуры. Для слоистой среды (N слоев) соотношения (4) в обозначениях [2] принимают следующий вид:

$$\mathbf{L}^{\pm}_{n,k}\mathbf{U}^{\pm}_{n} - \mathbf{L}^{\pm}_{n+1,k}\mathbf{U}^{\pm}_{n+1} = \mathbf{D}^{\pm}_{n,k}\mathbf{T}^{\pm}_{n} - \mathbf{D}^{\pm}_{n+1,k}\mathbf{T}^{\pm}_{n+1},$$
$$k, n = \overline{1, N},$$

где $\mathbf{U}^{\pm}_{n}$, $\mathbf{T}^{\pm}_{n}$ – двухмерные преобразования Фурье амплитуд перемещений $\mathbf{u}^{\pm}_{n} = \mathbf{u}(x_1, x_2, h_n \pm 0)$ и напряжений $\boldsymbol{\tau}^{\pm}_{n} = \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2, h_n \pm 0)$. При отсутствии нарушений сплошности среды $\mathbf{T}^{+}_{n} = \mathbf{T}^{-}_{n} \equiv \mathbf{T}_{n}$, $\mathbf{U}^{+}_{n} = \mathbf{U}^{-}_{n} \equiv \mathbf{U}_{n}$.

Построены функционально-матричные соотношения, соответствующие различным случаям расположения дефектов типа трещин в слоистой среде. Поверхность пакета подвергается воздействию системы штампов, нижняя граница жестко сцеплена с недеформируемым основанием. На поверхности в области контакта со штампами задаются смещения, на остальной части поверхности напряжения отсутствуют. Плоскости дефектов и плоскости раздела физико-механических свойств рассматриваются как блокообразующие границы. При этом на стыках слоев-блоков в областях, занятых трещинами, напряжения считаются заданными, ставится условие равенства напряжений на берегах разрезов, на остальной части плоскости раздела ставится условие идеального контакта. Далее считается, что во всех плоскостях раздела слоев на высотах h_n, $n = \overline{2, N}$, имеются трещины, занимающие односвязные области с кусочно-гладкими границами.

Функционально-матричные соотношения для рассматриваемой задачи можно записать

$$\mathbf{K}^{*}\mathbf{U}^{*} = \widetilde{\mathbf{T}}. \qquad (5)$$

Здесь

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \{\mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_N, \mathbf{U}^{0}_{N+1}\},$$
$$\mathbf{U}^{*} = \{\mathbf{U}^{*}_2, \ldots, \mathbf{U}^{*}_N, \mathbf{T}_{N+1}\},$$

$\mathbf{U}^{*}_{n}$ – Фурье-образы скачков перемещений на берегах трещин. Блоки $\mathbf{K}^{*}$ имеют вид

$$\mathbf{K}^{*}_{NN} = \mathbf{K}_N, \quad \mathbf{K}^{*}_{Nj} = \prod_{i=N}^{j+1} \mathbf{B}^{-}_{i}\mathbf{H}^{-1}_{i},$$

$$\mathbf{K}^{*}_{iN} = (-1)^{N-i} \prod_{l=i+1}^{N} \mathbf{H}^{-1}_{l}\mathbf{B}^{+}_{l}, \quad i, j = \overline{1, N-1},$$

$$\mathbf{K}^{*}_{N-1,N-1} = \mathbf{H}^{-1}_{N}, \quad \mathbf{K}^{*}_{N-1,j} = \mathbf{K}^{*}_{N-1,N-1} \prod_{l=N-1}^{j+1} \mathbf{B}^{-}_{l}\mathbf{H}^{-1}_{l},$$

$$\mathbf{K}^{*}_{i,N-1} = (-1)^{N-1-i}\left(\prod_{l=i+1}^{N-1} \mathbf{H}^{-1}_{l}\mathbf{B}^{+}_{l}\right)\mathbf{K}^{*}_{N-1,N-1},$$
$$i, j = \overline{1, N-2},$$

$$\mathbf{K}^{*}_{ii} = \mathbf{H}^{-1}_{i+1} - \mathbf{H}^{-1}_{i+1}\mathbf{B}^{+}_{i+1}\mathbf{K}^{*}_{i+1,i+1}\mathbf{B}^{-}_{i+1}\mathbf{H}^{-1}_{i+1}, \ i < N-1,$$

$$\mathbf{K}^{*}_{i,j} = \mathbf{K}^{*}_{i,i+1}\mathbf{B}^{-}_{j+1}\mathbf{H}^{-1}_{j+1} \text{ для } j < i < N-1,$$

$$\mathbf{K}^{*}_{i,j} = -\mathbf{H}^{-1}_{i+1}\mathbf{B}^{+}_{i+1}\mathbf{K}^{*}_{i+1,j} \text{ для } i < j < N-1,$$

$\mathbf{K}_N$ – матрица Грина пакета из N слоев без дефектов;

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}^{+}_{1}, \ \mathbf{H}_{l+1} = \mathbf{S}^{+}_{l+1} - \mathbf{K}_l,$$

$$\mathbf{S}^{\pm}_{l} = ((\mathbf{L}_{l,+})^{-1}\mathbf{J}^{\mp 1}_{l}\mathbf{L}_{l,+} - (\mathbf{L}_{l,-})^{-1}\mathbf{J}^{\pm 1}_{l}\mathbf{L}_{l,-})^{-1} \times$$
$$\times((\mathbf{L}_{l,+})^{-1}\mathbf{J}^{\mp 1}_{l}\mathbf{D}_{l,+} - (\mathbf{L}_{l,-})^{-1}\mathbf{J}^{\pm 1}_{l}\mathbf{D}_{l,-}),$$

$\mathbf{J}_{k-1}$ – диагональные матрицы,

$$\mathbf{J}_l = \{e^{i\alpha_{31,l}H_l}, e^{i\alpha_{32,l}H_l}, e^{i\alpha_{33,l}H_l}\},$$

$$\mathbf{B}^{\pm}_{l} = -((\mathbf{L}_{l,+})^{-1}\mathbf{J}^{\mp 1}_{l}\mathbf{L}_{l,+} - (\mathbf{L}_{l,-})^{-1}\mathbf{J}^{\pm 1}_{l}\mathbf{L}_{l,-})^{-1} \times$$
$$\times((\mathbf{L}_{l,+})^{-1}\mathbf{D}_{l,+} - (\mathbf{L}_{l,-})^{-1}\mathbf{D}_{l,-}).$$

Перемещения $\mathbf{U}^{-}_{i}$ на границах раздела слоев могут быть определены через скачки перемещений

$$\mathbf{W}^{*}\mathbf{U}^{*} = \mathbf{U}, \qquad (6)$$

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{U}^{-}_{2}, \ldots, \mathbf{U}^{-}_{N}\}, \quad \mathbf{W}^{*}_{ij} = \mathbf{K}_i\mathbf{K}^{*}_{ij} \text{ для } i \leq j,$$

$$\mathbf{W}^{*}_{ij} = \prod_{l=i}^{j+1} \mathbf{B}^{-}_{l}\mathbf{H}^{-1}_{l} + \mathbf{K}_i\mathbf{K}^{*}_{ij} \text{ для } j < i < N.$$

Метод факторизации, в результате применения которого получены матрицы-символы ядер интегральных уравнений задач для сред с дефектами, дает возможность исследовать с единых позиций все основные типы краевых задач, возникающих при изучении напряженно-деформированного состояния сред при наличии воздействий внешних полей любой природы, описываемых системами линейных уравнений в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами. Достоинством предложенного подхода является его тесная связь с методом преобразований Фурье в областях с плоскопараллельными границами; кроме того, использование метода факторизации упрощает построение систем интегральных уравнений рассматриваемых задач. Решения получаемых на основе соотношений (5), (6) систем интегральных уравнений для частных случаев областей, занимаемых дефектами, строятся с помощью факторизационных методов Винера–Хопфа или фиктивного поглощения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-08-00289.

Список литературы

1. Бабешко В.А., Бабешко О.М. // Докл. РАН. 2005. Т. 403, №6. С. 26–28.

2. Павлова А.В., Рубцов С.Е. Исследование многослойных материалов при наличии нарушений сплошности соединений // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2004. №3. С. 19–22.

THE DIFFERENTIAL FACTORIZATION METHOD FOR LAYER-STRUCTURED MEDIA WITH DEFECTS

A.V. Pavlova, S.E. Rubtsov

The analysis of tension fault-block structures of the lithosphere leads to the investigation of the problems for layered-block media with multiple inhomogeneities. Difficulties of studying such environments can not be overcome by using only modern computational tools. The differential factorization method for boundary value problems of complex media is a generalization of the integral transform method and is a convenient tool for their study. On this basis, we propose a new analytic method of functional equations and integral equations for a layer-structured medium with defects such as cracks.

Keywords: differential factorization method, layered-block media, cracks.