УДК 539.3,534.1

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Н.А. Пинчук, А.М. Столяр

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

ajoiner@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследуются начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа – линейных и нелинейных – с подвижной границей. Они моделируют продольные и продольно-поперечные колебания упругого троса переменной длины. Рассмотренные постановки восходят к работам А.Ю. Ишлинского [1], Г.Н. Савина и О.А. Горошко [2], А.И. Весницкого [3] и др. Предлагаются асимптотический и численные методы решения. При асимптотическом анализе в качестве малого параметра используется отношение скорости изменения длины троса к скорости распространения волны. Численные методы являются модификациями методов конечных разностей и Рунге–Кутта. Проводится сравнение результатов асимптотического и численного интегрирования.

Ключевые слова: начально-краевые задачи, подвижные границы, асимптотическое и численное интегрирование.

1. Продольные колебания троса переменной длины. Построение асимптотики

Моделируемая система состоит из троса, который может разматываться с катушки или наматываться на нее с заданной скоростью, и висящего на ней груза [1]. Поведение данной системы можно описать следующими уравнениями [4]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, U\Big|_{x=l(t)} = 0,\\
U(x,t) = \xi(t) - x - u(x,t),\\
\left.\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right|_{x=0} = \frac{EF}{m}\left(\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} + 1\right) + g,\\
\frac{dl}{dt}\left[1 + \frac{\partial u(l,t)}{\partial l}\right] = \varepsilon_{\pm}\psi(t),\\
U\Big|_{t=0} = \Phi_1(x), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \Phi_2(x),\\
l(t)\Big|_{t=0} = l_0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $u(x, t)$ – продольное смещение троса в подвижной системе координат, связанной с грузом; $\xi(t)$ – расстояние от точки подвеса троса до груза, $l(t)$ – длина троса в недеформированном состоянии; $\varepsilon_{\pm}\psi(t)$ – скорость изменения длины троса, $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \succ 0,$ когда длина троса увеличивается, $\varepsilon_{\pm} = -\varepsilon \prec 0,$ когда длина троса уменьшается, $\varepsilon = V_*/a$; V_* – максимальная скорость изменения длины троса за время рассматриваемого процесса; предполагается, что $\varepsilon \prec\prec 1$; остальные обозначения понятны.

Задача (1), в свою очередь, путем введения новой неизвестной функции сводится к следующей:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathrm{P}(\varepsilon_{\pm}, t) = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\
\left.\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right|_{x=0} + \mathrm{P}(\varepsilon_{\pm}, t) = \frac{EF}{m}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0},\\
v\Big|_{t=0} = \Phi_{11}(x),\\
\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \Phi_{22}(x), \quad l(t) = l_0 + \varepsilon_{\pm} l_1(t),\\
l_1(t) = \int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau, \quad v\Big|_{x=l(t)} = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь функции $\mathrm{P}(\varepsilon_{\pm}, t), \Phi_{11}(x), \Phi_{22}(x)$ выражаются через исходные параметры. Задача (2) содержит малый параметр ε как в уравнении, так и в краевых условиях, причем на краю $x = l(t)$ он входит в выражение для самой границы. Применяя метод асимптотического интегрирования, решение задачи (2) строим в виде

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x,t)\varepsilon^k \tag{3}$$

и для функций $v_k(x,t)$ получаем начально-краевые задачи уже на постоянном отрезке:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + \alpha_k \mathrm{P}_k(t) = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\
\left.\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}\right|_{x=0} + \alpha_k \mathrm{P}_k(t) = \frac{EF}{m}\left.\frac{\partial v_k}{\partial x}\right|_{x=0},
\end{gathered}$$

$$v_0\big|_{x=0} = 0, \quad k \ge 0,$$

$$v_k\big|_{x=l_0} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{[l_1(t)]^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \left.\frac{\partial^{k-i} v_k}{\partial x^{k-i}}\right|_{x=l_0},$$

$$v_k\big|_{t=0} = \beta_k \Phi_{11}(x), \quad \left.\frac{\partial v_k}{\partial t}\right|_{t=0} = \gamma_k \Phi_{22}(x). \quad (4)$$

2. Продольно-поперечные колебания троса переменной длины. Построение асимптотики

Для описания продольно-поперечных колебаний в плоской постановке добавим к уравнениям задачи (1) уравнения:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + q(x,t), \quad (5)$$

$$w\big|_{x=0} = f_1(t), \quad w\big|_{x=l(t)} = f_2(t),$$

$$w\big|_{t=0} = \Psi_1(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi_2(x).$$

Здесь через $q(x,t)$ обозначена приведенная внешняя нагрузка, действующая на трос в поперечном направлении; функции $f_1(t), f_2(t)$ и $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ задают краевые и начальные условия соответственно. В выражение одной из границ задачи (5) входит малый параметр. Разлагая функцию $w(x, t)$ в ряд Тейлора в окрестности $x = l_0$, строим ее попутно с разложением (3) функции $v(x, t)$ в виде

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x,t)\varepsilon^k. \quad (6)$$

Для функций $w_k(x,t)$ аналогично п. 1 получаем начально-краевые задачи на постоянном отрезке.

3. Численное интегрирование

Проведено численное решение исходных задач (1) и (1), (5) на переменном промежутке $[0, l(t)]$ и решение с использованием разложений (3) и (3), (6) соответственно. Для решения исходных задач разработаны модификации метода конечных разностей (МКР) и метода Рунге–Кутта, учитывающие переменность отрезка интегрирования. При использовании явной схемы модифицированного МКР вводится фиктивная сетка, в ее узлах значения неизвестной функции вычисляются при помощи методов интерполяции. При использовании модифицированного метода Рунге–Кутта решение исходной задачи приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций в узлах подвижной сетки.

Проведено сравнение результатов асимптотического и численного интегрирования для конкретных значений физических параметров задачи и различных наборов начальных условий. При относительно низких скоростях изменения длины троса получено хорошее совпадение результатов асимптотического и численного интегрирования на временах порядка 3-4 периодов колебаний системы. В то же время при высокой скорости изменения длины уже после первого периода колебаний начинается расхождение результатов асимптотического и численного анализа. Проведенные численные эксперименты позволяют сделать вывод, что асимптотика в сочетании с численным интегрированием позволяет эффективно решать широкий класс задач о колебаниях тросов переменной длины.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 06-01-00287.

Список литературы

1. Ишлинский А.Ю. // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5, №4. С. 370–374.
2. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев, 1962.
3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. С. 320.
4. Кечеджиян Л.О., Пинчук Н.А., Столяр А.М. // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. 2008. № 1. С. 22–27.

SOLUTION OF INITIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH MOVING BOUNDARIES

N.A. Pinchuk, A.M. Stolyar

Initial boundary-value problems with moving boundaries for linear and nonlinear hyperbolic type equations are investigated. They model longitudinal and transverse-longitudinal oscillations of elastic cable of a variable length. Formulations of the problem considered go back to the papers by A.J. Ishlinsky [1], G.N. Savin and O.A. Goroshko [2], A.I. Vesnitsky [3]. Asymptotic and numerical methods are developed. Asymptotic integration is carried out when the small parameter is equal to the relation of velocities of the cable length variation and wave propagation. Numerical integration is done using the modified finite-difference and Runge–Kutta methods. Comparison of asymptotic and numerical solutions is carried out.

Keywords: initial boundary-value problems, moving boundaries, asymptotic and numerical integration.