Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2440–2442

УДК 539.3

К ВЫБОРУ ФИЗИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫХ РЕШЕНИЙ АВТОМОДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Д.А. Потянихин, О.В. Дудко

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

potyanikhin@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Уравнения нелинейной теории упругости относятся к классу гиперболических систем, выражающих законы сохранения. Известно, что существуют такие гиперболические системы уравнений, для которых построение решений автомодельных задач с использованием непрерывных функций и ударных волн оказывается неоднозначным [1–3]. Для выделения единственного, физически обоснованного решения необходимо учитывать дополнительные ограничения. В настоящем исследовании выбор единственного решения из числа математически возможных связан с термодинамическим условием совместности сильных разрывов, выражающим неубывание энтропии при необратимых процессах на ударных волнах, а также с условием эволюционности ударных волн.

Ключевые слова: нелинейная упругость, ударная волна, автомодельная волна Римана, контактное взаимодействие.

В твердых телах скорость распространения тепла существенно меньше скорости распространения ударных возмущений. Поэтому в задачах динамики деформирования упругих тел процессом теплопередачи часто пренебрегают, полагая коэффициенты теплопроводности равными нулю. Однако исключение из полной системы соотношений теории термоупругости уравнений, связанных с балансом температуры, приводит к неединственности решения даже простейших краевых задач, допускающих автомодельную постановку. Иногда удается удовлетворить начальным и граничным условиям задачи, предполагая появление в среде различных комбинаций волновых фронтов, вызванных ударным нагружением. С математической точки зрения все такие решения равноправны, ни одному из них нельзя отдать предпочтение.

Предлагается способ, позволяющий определять единственное решение плоских автомодельных задач динамики деформирования нелинейной упругой среды при помощи дополнительных критериев – условия эволюционности и условия неубывания энтропии в необратимом процессе на ударной волне. Этот способ продемонстрирован на решении плоской автомодельной задачи об ударе абсолютно твердым телом по упругому полупространству [4].

Динамическое деформирование среды нелинейно-упругого тела представляется в переменных Эйлера соотношениями:

$$v_i = \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \quad w_i = \dot{v}_i + v_j v_{i,j},$$
$$2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \quad \sigma_{ij,j} = \rho w_i,$$
$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \tag{1}$$
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3},$$
$$W = \frac{\lambda}{2}I_1^2 = \mu I_2 + \kappa I_1 I_2 + \chi I_1^3 + \eta I_3 + ...,$$
$$I_1 = \alpha_{kk}, \quad I_2 = \alpha_{ik}\alpha_{ki}, \quad I_3 = \alpha_{ik}\alpha_{kj}\alpha_{ji}.$$

В соотношениях (1) u_i, v_i, w_i – компоненты векторов перемещений, скоростей и ускорений точек среды; α_{ij}, σ_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси и тензора напряжений Эйлера–Коши; ρ_0, ρ – плотность материала в начальном и текущем состоянии соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера. При адиабатическом деформировании изотропной среды упругий потенциал W зависит от инвариантов тензора деформаций I_1, I_2, I_3; λ, μ – параметры Ламе; κ, χ, η – упругие модули третьего порядка.

На волновых фронтах скачки параметров напряженно-деформированного состояния и движения точек среды связаны динамическими и кинематическими условиями совместности [5]. Условие неубывания энтропии на поверхности сильных разрывов приводит к термодинамическому условию совместности [6], аналогом которого в газовой динамике является теорема Цемплена:

$$\sigma_{ij}^{+}[v_i]n_j - \rho^{+}(v_j^{+}n_j - G)\left(\frac{[v_i][v_i]}{2} + \frac{[W]}{2}\right) \geq 0. \quad (2)$$

Пусть упругое тело I занимает полупространство $x_1 > 0$. Его границу обозначим через L_1. Абсолютно твердое тело II с плоской границей L_2, двигаясь с постоянной скоростью $\bar{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}\}$, сталкивается с упругим телом так, что появляется общая граница двух тел OL (рис. 1, 2). На участке OL выполняется закон сухого трения.

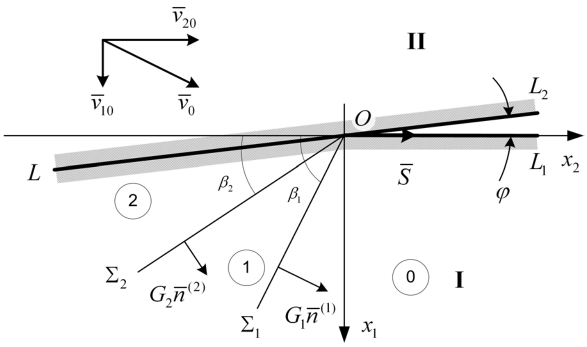

Рис. 1

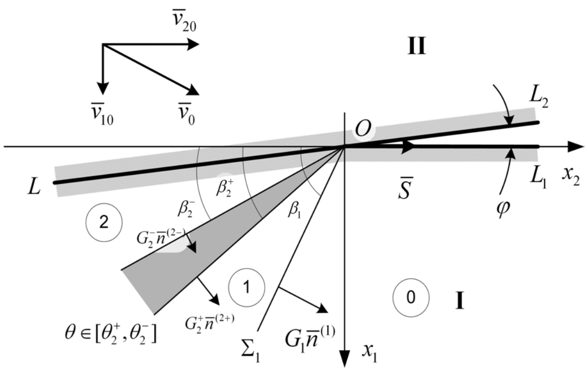

Рис. 2

Скорость движения точки O (начала подвижной системы координат) определяется соотношением $S = v_{20} + v_{20}\mathrm{ctg}\varphi$. Полагаем эту скорость достаточно большой, чтобы возникающие при столкновении волновые фронты не могли отделиться от точки O. Для этого необходимо считать скорость соударения v_0 достаточно большой, а угол φ – малым. Ввод автомодельной переменной $\theta = x_1/(St - x_2)$ и представление компонент вектора перемещений в виде $u_1 = (St - x_2)F(\theta)$, $u_2 = (St - x_2)\Phi(\theta)$, $u_3 = 0$ позволяют перейти в системе определяющих соотношений (1) к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F(\theta)$ и $\Phi(\theta)$. Анализ решений этой системы показывает, что волновая картина может состоять из двух комбинаций плоских ударных фронтов и простых волн Римана (см. рис. 1, 2), причем из-за отсутствия предварительных деформаций передним фронтом всегда оказывается продольная ударная волна Σ_1 ($\theta_1 = \mathrm{tg}\beta_1$). Следом за ней может распространяться либо квазипоперечная ударная волна Σ_2, отвечающая значению $\theta_2 = \mathrm{tg}\beta_2$ (см. рис. 1), либо центрированная волна $\theta \in [\theta_2^+, \theta_2^-]$ (см. рис. 2).

Получив решение задачи при всех возможных постановках, проверяем выполнение термодинамического условия совместности (2) на ударных волнах. Если соотношение (2) не выполняется при некоторой постановке, то такую постановку исключаем из числа возможных. Еще одним ограничением на существование ударных волн является условие эволюционности. Если в результате сопоставления двух решений оказывается, что фронт ударной волны Σ_2 занимает промежуточное положение внутри веера простой волны $\theta \in [\theta_2^+, \theta_2^-]$, то считаем ударную волну Σ_2 неэволюционной и выбираем решение с волной Римана.

Серия вычислительных экспериментов позволила изучить зависимость напряженно-деформированного состояния от параметров соударения v_{10}, v_{20}, φ и коэффициента трения k на границе OL. Оказалось, что при различных наборах параметров реализуются обе волновые картины (см. рис. 1, 2). При этом каждая волновая картина может соответствовать как жесткой сцепке двух тел, так и проскальзыванию на границе OL.

Список литературы

1. Буренин А.А., Лапыгин В.В. Об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от плоской жесткой границы нелинейной упругой среды // ПМТФ. 1985. №5. С. 125–129.

2. Агапов И.Е., Буренин А.А., Резунов А.В. О соударении двух нелинейно-упругих тел с плоскими границами // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР. 1991. С. 206–215.

3. Kulikovskii A.G., Chugainova A.P., Sveshnikova E.I. Nonuniqueness of solution to nonlinear of the elasticity theory // Journal of Engineering Mathematics. 2006. Vol. 55, No 1–4. P. 97–110.

4. Дудко О.В., Потянихин Д.А. О косом ударе жестким телом, имеющим плоскую границу, по нелинейному упругому полупространству // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4, ч. 2. С. 32–40.

5. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 523 с.

6. Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 711–717.

ON THE CHOICE OF PHYSICALLY FEASIBLE SOLUTIONS OF SELF-SIMILAR BOUNDARY PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICAL ELASTICITY THEORY

D.A. Potyanikhin, O.V. Dudko

Equations of nonlinear elasticity theory belong to hyperbolic systems resulting from conservation laws. It is well known that for certain hyperbolic systems of equations the solutions of self-similar boundary problems composed of continuous functions and shock waves are non-unique. In order to choose unique physically feasible solution it is necessary to take into account additional contingencies. In this paper the choice of unique solution from among all the probable solutions is associated with the thermodynamical compatibility condition and the existence condition of evolutionary shock waves. The former condition follows from the second law of thermodynamics for shock waves.

Keywords: nonlinear elasticity, shock wave, self-similar Riemann wave, contact interaction.