Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2446–2448

УДК 517.95+532.51

КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ДЛИННЫХ ТРУБАХ

В.В. Пухначёв

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

pukhnachev@gmail.com

Поступила в редакцию 24.08.2011

Решения уравнений Обербека – Буссинеска, в которых температура линейно зависит от одной из пространственных координат, впервые были изучены Г.А. Остроумовым (1952). Их точное решение, описывающее плоское стационарное течение в полосе под действием продольного градиента температуры и поперечного поля тяжести, получено Р.В. Бирихом [1]. Его обобщение на случай движения в цилиндрическом канале произвольного поперечного сечения дано В.В. Пухначёвым в [2]. Вектор скорости течения имеет три компоненты, но они не зависят от осевой координаты, тогда как температура и давление зависят от нее линейно. Можно надеяться, что эти решения хорошо описывают движение в основной части длинной трубы, торцы которой твердые непроницаемые изотермические стенки. Другие обобщения этого решения и подробная библиография содержатся в монографии [3].

Новый пример трехмерного конвективного течения, полученного на базе решения двумерных уравнений, – тепловая конвекция в круглой вращающейся трубе с осевым градиентом температуры [4]. Угловая скорость вращения трубы и ускорение силы тяжести в этой задаче могут произвольно зависеть от времени. Если сила тяжести отсутствует, задача становится линейной и допускает точные решения. С точки зрения интерпретации наиболее интересно решение, в котором расход жидкости через поперечное сечение трубы равен нулю. Характерной особенностью рассмотренного класса течений является возможность переноса ими пассивной примеси на большие расстояния вдоль трубы при совместном действии продольного градиента температуры и поперечных центростремительной силы или силы тяжести (при этом величины последних могут быть очень малыми). Также рассмотрены точные решения плоской и осесимметричной задач для однослойной и двухслойной жидкостей, в которых продольный градиент температуры является функцией времени. В последнем случае учитывается термокапиллярный эффект на границе раздела жидкостей.

Ключевые слова: уравнения Обербека – Буссинеска, точные решения трехмерных задач конвекции, течения с границей раздела.

Групповое свойство уравнений конвекции

Задача о тепловой гравитационной конвекции жидкости в круглой вращающейся трубе рассматривается в приближении Обербека – Буссинеска. Обозначим через r, φ, z цилиндрические координаты, через a – радиус трубы, а через $\omega(t)$ – угловую скорость ее вращения вокруг оси z. Помимо центростремительной силы, на жидкость действует массовая сила с ускорением $(-g(t)\sin\varphi, -g(t)\cos\varphi, 0)$. Если $g = \mathrm{const}$, эту силу можно отождествить с силой тяжести. Далее u и w обозначают радиальную и осевую компоненты вектора скорости, v – разность между окружной скоростью и скоростью вращения жидкости как твердого тела ωr; p – отклонение давления от его равновесного значения $\rho(-gr\sin\varphi + \omega^2 r^2/2)$; θ – отклонение температуры от среднего значения.

Непосредственная проверка показывает, что существует преобразование указанной системы, при котором все независимые переменные, кроме z, и компоненты скорости уравнений остаются неизменными, а z, p и θ преобразуются по формулам $p' = p + c\rho[A\beta(gr\sin\varphi - \omega^2 r^2/2) - G]$, $\theta' = \theta - Ac$, $z' = z + c$ (c и A – постоянные, G – функция t). Общий вид соответствующего инвариантного решения (ИР) таков:

$$u = u(r,\varphi,t), \quad v = v(r,\varphi,t), \quad w = w(r,\varphi,t),$$

$$p = \rho[-A\beta(gr\sin\varphi - \omega^2 r^2/2) + G]z + q(r,\varphi,t),$$

$$\theta = -Az + T(r,\varphi,t).$$

Функции u, v, w, q, T удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi + \omega u_\varphi - 2\omega v - \frac{v^2}{r} =$$

$$= -\frac{q_r}{\rho} + \nu\left(u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} - \frac{2v_\varphi}{r^2} - \frac{u}{r^2}\right) +$$

$$+ (g\sin\varphi - \omega^2 r)\beta T,$$

$$\dot\omega r + v_t + uv_r + \frac{vv_\varphi}{r} + \omega v_\varphi + 2\omega u + \frac{uv}{r} = -\frac{q_\varphi}{\rho r} +$$

$$+\nu\left(v_{rr}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_{\varphi\varphi}}{r^2}+\frac{2u_\varphi}{r^2}-\frac{v}{r^2}\right)+\beta Tg\cos\varphi,$$

$$w_t+uw_r+\frac{vw_\varphi}{r}+\omega w_\varphi=A\beta\left(gr\sin\varphi-\frac{\omega^2r^2}{2}\right)-$$

$$-G+\nu\left(w_{rr}+\frac{w_r}{r}+\frac{w_{\varphi\varphi}}{r^2}\right),\quad u_r+\frac{u}{r}+\frac{v_\varphi}{r}=0,$$

$$T_t+uT_r+\frac{vT_\varphi}{r}+\omega T_\varphi-Aw=\chi\left(T_{rr}+\frac{T_r}{r}+\frac{T_{\varphi\varphi}}{r^2}\right).\quad (1)$$

Формулировка начально-краевых задач для системы (1)

Наиболее естественной является следующая интерпретация ИР. Жидкость заполняет круглую вращающуюся трубу, на поверхности которой поддерживается постоянный осевой градиент температуры. Вектор скорости удовлетворяет условию прилипания на границе области течения. В нестационарной задаче следует задавать начальное распределение скорости и температуры. Кроме того, может быть задан осевой градиент давления и поперечная сила тяжести.

Вид ИР ограничивает выбор начальных данных. В частности, все три компоненты начального поля скоростей должны быть функциями лишь двух переменных r и φ. Обозначим через Ω круг $r<a$, а через Γ – его границу. Через Q_l обозначим цилиндр $(r,\varphi)\in\Omega$, $0<t<l$, а через B_l – его боковую поверхность. Поставим задачу (А): при заданной функции G найти решение системы (1) в области Q_l, удовлетворяющее краевым условиям

$$u=v=w=0,\quad T=0,\quad (r,\varphi,t)\in B_l, \qquad (2)$$

и начальным условиям

$$u=u_0,\quad v=v_0,\quad w=w_0,\quad T=T_0,\quad (r,\varphi)\in\Omega,\ t=0, \qquad (3)$$

где u_0, v_0, w_0, T_0 – заданные функции r и φ, удовлетворяющие условию согласования с уравнением неразрывности. Для любого $l>0$ задача (А) имеет, и притом единственное, решение.

Стационарным аналогом задачи (А) является задача (Б), в которой производные по времени в (1) приняты равными нулю и величины ω, g и G являются постоянными. Для задачи (Б) удается доказать лишь локальную разрешимость. Если величины g, $|\omega|$, $|G|$ достаточно малы, тогда задача (Б) имеет, по крайней мере, одно изолированное решение, и его норма в соответствующем классе Гельдера тоже мала.

Вращательно-симметричные движения

Предположим, что $g=0$ и функции u_0, v_0, w_0, T_0, входящие в условия (3), не зависят от полярного угла φ. Тогда задача (А) допускает вращательно-симметричное решение, в котором все искомые функции также не зависят от φ, и других решений она не имеет. Если исключить наличие источников и стоков на оси трубы, то $u=0$. Уравнения задачи (А) при этом становятся линейными:

$$w_t=-\frac{1}{2}A\beta\omega^2r^2-G+\nu\left(w_{rr}+\frac{1}{r}w_r\right),$$

$$T_t-Aw=\chi\left(T_{rr}+\frac{1}{r}T_r\right),$$

$$\dot\omega r+v_t=\nu\left(v_{rr}+\frac{1}{r}v_r-\frac{v}{r^2}\right),\quad q_r=\frac{\rho v^2}{r}.$$

Видно, что окружная и осевая компоненты скорости не взаимодействуют, а распределение температуры определяется лишь компонентой w. Каждая из начально-краевых задач может быть решена методом Фурье. Для стационарного случая легко написать точное решение. Для полностью заполненной трубы с расходом Q через сечение трубы решение имеет вид

$$w=\frac{\mathrm{Ra}}{96}(1-4r^2+3r^4)+\frac{Q}{2\pi}(1-r^2),$$

$$T=\frac{\mathrm{Ra}}{8\cdot128}(1-r^2)^3+\frac{Q}{8\pi}(3-4r^2+r^4),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\mathrm{Ra}}{6}(1-3r^2)-\frac{8Q}{\pi},$$

где $\mathrm{Ra}=A\beta\omega^2a^5/\omega\chi$ – число Рэлея.

Особый интерес представляет случай, когда труба с продольным градиентом температуры заполнена двумя разными жидкостями. Наличие границы раздела между жидкостями приводит к возникновению поверхностной термокапиллярной силы, заставляющей жидкость двигаться вдоль трубы. Во вращающейся трубе под влиянием еще и центробежной силы формируется достаточно сложное с несколькими управляющими параметрами конвективное течение, которое описывается элементарными функциями.

Соавтором работы является проф. Р.В. Бирих.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 09-01-00484 (Р.В. Бирих), № 10-01-00007 (В.В. Пухначёв), Интеграционного проекта СО, УрО и ДВО РАН и Федеральной целевой программы «Кадры» (контракт № 14.740.11.0355).

Список литературы

1. Бирих Р.В. // ПМТФ. 1966. Т. 6, № 3. С. 69–72.
2. Пухначев В.В // Симметрия и дифференциальные уравнения: Науч. сб. Красноярск, 2000. С. 180–183.
3. Андреев В.К. Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. Красноярск: СФУ, 2010.
4. Бирих Р.В., Пухначев В.В. // Докл. РАН. 2011. Т. 436, № 3. С. 323–327.

CONVECTIVE FLOWS IN LONG TUBES

V.V. Pukhnachev

Solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations with a linear dependence of temperature on one of the space coordinates firstly were studied by G.A. Ostroumov (1952). Their exact solution, which describes plane stationary flow in a strip under action of longitudinal temperature gradient and transversal gravity field, was obtained by R.V. Birikh (1966). The upper strip boundary can be a non-deformable free surface. Asymptotical character of this solution was confirmed by both experimental and numerical methods (A.G. Kirdyashkin, V.I. Polezhaev and A.I. Fedyushkin, 1983). Generalization of mentioned solutions for flows in a horizontal cylindrical tube with an arbitrary cross section is given by V.V. Pukhnachev (2000). Here the velocity vector has three components but they do not depend on the axial coordinate while the temperature and pressure depend on it linearly. One can hope that these solutions give a good flow description in the main part of a long tube, which ends are solid impermeable isothermal walls.

Another example of three-dimensional convective flow obtained on the base of solving two-dimensional equations gives the problem of thermal convection in a circular rotating tube with an axial temperature gradient (R.V. Birikh and V.V. Pukhnachev, 2011). Angular velocity of the tube rotation and gravity acceleration in this problem can depend on time arbitrarily. If the gravity is absent the problem becomes a linear one and admits exact solutions. From the point of interpretation, the solution, in which the liquid flux through the tube cross section is equal to zero, has a special interest. The characteristic peculiarity of the considered class of solutions is the possibility of passive admixture transport on large distance along the tube under joint action of longitudinal temperature gradient and transversal centrifugal or gravity forces (moreover the values of the latter can be very small). Exact solutions of plane and axially symmetric problems for uniform and two-layered liquids, in which longitudinal temperature gradient is a function of time, are considered also. In the last case, thermocapillary effect on the interface is taken into account.

Keywords: Oberbeck – Boussinesq equations, exact solutions for three-dimensional problems of convection, motions with an interface.