Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2460–2462

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

***Н.А. Роганова*[1], *Г.З. Шарафутдинов*[2]**

[1]Московский государственный индустриальный университет
[2]НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

roganova@msiu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматривается класс задач, связанный с деформированием трубы, неоднородность материала которой зависит от условий его синтеза или действия различных причин. Также разработана математическая модель для анализа напряженно-деформированного состояния в двумерных задачах теории упругости неоднородных тел. Получены новые формы основных уравнений, предложен метод последовательных приближений при решении этого класса задач. Представлены общие выражения для напряжений в виде рядов, доказана их сходимость. При помощи функций комплексного переменного получены аналитические выражения для последовательных приближений.

Ключевые слова: теория упругости, плоская задача, неоднородные материалы.

Неоднородность упругих характеристик деформируемого изотропного материала зададим в виде переменного модуля сдвига μ, являющегося непрерывной функцией координат, и постоянным или кусочно-постоянным коэффициентом Пуассона ν.

Рассматривается класс задач, связанный с деформированием толстостенной цилиндрической трубы с внутренним радиусом a и внешним радиусом b, неоднородность материала которой зависит от условий его синтеза или действия различных причин: агрессивной среды, радиации и т.п. Пусть на внутреннюю и внешнюю поверхности трубы действуют равномерные давления p и q соответственно. Помимо этого полагаем, что в продольном направлении действует сила F. Для определенности будем считать, что внутри трубы находится агрессивная среда, проникновение которой в тело трубы приводит к неоднородному изменению упругих характеристик материала. В силу осевой симметрии характеристики материала трубы зависят лишь от радиальной координаты; при этом радиальное перемещение $u = u(r)$. Окружные перемещения положим равными нулю, осевую деформацию ε_z считаем постоянной. Установлено [1], что радиальное перемещение $u = u(r)$ удовлетворяет уравнению:

$$\mu(r)\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{\mu(r)}{r} + \frac{d\mu(r)}{dr}\right]\frac{du}{dr} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\mu(r)}{r^2}u = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{d\mu(r)}{dr}\varepsilon_z. \qquad (1)$$

Уравнение (1) решается методом прогонки при любом типе краевых условий, после чего нетрудно определить компоненты тензоров деформаций и напряжений. Рассматривается также альтернативный подход, в соответствии с которым при действии агрессивной среды внутри трубы вводится, согласно [2], понятие диффузионного фронта с границей раздела $r = c$. При этом предполагается, что внутренний слой трубы имеет переменный модуль сдвига $\mu(r)$ и $\nu = 0.5$, в то время как внешний неповрежденный слой материала трубы сохраняет свои однородные свойства. Задача сводится к задаче теории упругости для неоднородного тела в области $a \le r \le c$ и к задаче Ламе в области $c \le r \le b$. Таким образом, во внешней области имеем решение задачи Ламе, а во внутренней области [1]

$$\sigma_r = 2m_1 + 2m_2[A(r) - B(r)],$$
$$\sigma_\alpha = 2m_1 + 2m_2[A(r) + B(r)],$$
$$\sigma_z = 2m_1 + 2m_2A(r) + 3\mu(r)\varepsilon_z,$$
$$u = -\frac{\varepsilon_z}{2} + \frac{m_2}{r},$$
$$A(r) = \int_a^r \frac{\mu'(r)}{r^2}dr, \quad B(r) = \frac{\mu(r)}{r^2},$$

где постоянные m_1, m_2 определяются путем удовлетворения краевым условиям.

Разработана также математическая модель для исследования напряженно-деформированного состояния в двумерных задачах теории упругости неоднородных тел. Рассматривается плоская задача неоднородного упругого тела в напряжениях. Граничные условия представим в виде $\sigma_{ij} l_j \big|_L = p_i$, где L – граница некоторой односвязной области S; p_i – компоненты вектора внешнего напряжения. Неоднородность материала зададим в виде $\nu = \text{const}$, $\mu = \mu_0 M(x_1, x_2)$, $0 < M(x_1, x_2) \le 1$, $(x_1, x_2) \in S$, где μ_0 – размерный множитель. Вводятся безразмерные компоненты тензора напряжений τ_{ij}, связанные с размерными компонентами σ_{ij} этого тензора соотношениями $\sigma_{ij} = 2\mu_0 M(x_1, x_2)\tau_{ij}$. Уравнения равновесия, выраженные относительно величин τ_{ij}, принимают вид

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = -\tau_{11}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} - \tau_{12}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} = -\tau_{12}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} - \tau_{22}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}. \quad (2)$$

При учете закона Гука и уравнений равновесия условие совместности приводится к виду

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\tau_{11} + \tau_{22}) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\tau_{11}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} + \tau_{12}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\tau_{12}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} + \tau_{22}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}\right]. \quad (3)$$

Для решения системы уравнений (2), (3) применим метод последовательных приближений. Общее решение системы запишется в виде

$$\tau_{11}^{(k+1)} = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{\ln^n M}{n!}\frac{\partial^2 \Phi_{k-n+1}}{\partial x_2^2},$$
$$\tau_{22}^{(k+1)} = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{\ln^n M}{n!}\frac{\partial^2 \Phi_{k-n+1}}{\partial x_1^2},$$
$$\tau_{12}^{(k+1)} = \sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+1} \frac{\ln^n M}{n!}\frac{\partial^2 \Phi_{k-n+1}}{\partial x_1 \partial x_2},$$
$$(1-\nu)\nabla^4 \Phi_{k+1} = (1-\nu)\nabla^2 \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n \frac{\ln^{n+1} M}{(n+1)!}\nabla^2 \Phi_{k-n} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n \frac{\ln^{n+1} M}{(n+1)!}\frac{\partial^2 \Phi_{k-n}}{\partial x_1 \partial x_2}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n \frac{\ln^{n+1} M}{(n+1)!}\frac{\partial^2 \Phi_{k-n}}{\partial x_2^2}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n \frac{\ln^{n+1} M}{(n+1)!}\frac{\partial^2 \Phi_{k-n}}{\partial x_1^2}\right].$$

Доказана сходимость выражений для безразмерных компонент тензора напряжений [3]. Полученная система упрощена путем применения функций комплексного переменного [4]. Такой подход позволил получить аналитические формы первого, второго и последующих приближений.

Применим указанный подход к решению следующей задачи. Пусть в неоднородном упругом пространстве имеется круговая цилиндрическая полость бесконечной протяженности и пространство подвергается одноосному растяжению в направлении, перпендикулярном продольной оси цилиндрического выреза, заданными на бесконечности напряжениями. Будем считать, что на бесконечности заданы напряжения $\sigma_{11} = p$, а поверхность кругового выреза радиуса R свободна от внешних воздействий. Неоднородность материала зададим при помощи двухпараметрического семейства функций вида

$$\mu(x_1, x_2) = \frac{\mu_0}{m}\exp\left[q\left(\frac{R^2}{x_1^2 + x_2^2}\right)^3\right],$$
$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \ge R^2,$$

где μ_0 – размерный модуль сдвига, параметры m и q определяют вид неоднородности материала. Коэффициент Пуассона ν считаем постоянным. При решении этой задачи в качестве нулевого приближения выбирается тривиальное решение. Заметим, что при определении комплексных потенциалов удобно применить интеграл типа Коши.

В качестве иллюстрации на рис. 1 и 2 приведены зависимости компонент $\sigma_{rr}^{(3)}$ и $\sigma_{\alpha\alpha}^{(3)}$ от радиуса для $\alpha = \pi/2$ при $p = 1$, $\mu_0 = 1$, $R = 2$, $\nu = 0.33$.

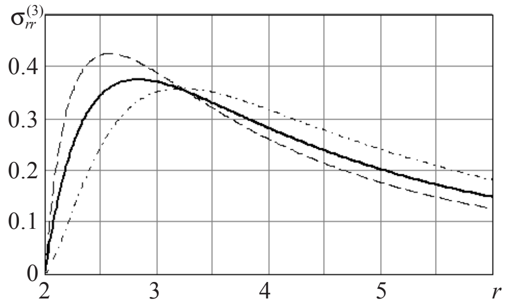

Рис. 1

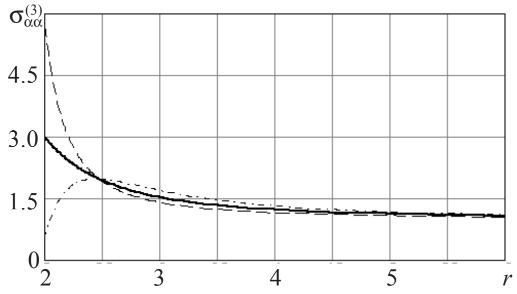

Рис. 2

Сплошная линия – решение для однородного тела; пунктирная – решение для $q = 0.5$, $m = \sqrt{e}$, штрихпунктирная – для $q = -0.5$, $m = 1$.

Список литературы

1. Шарафутдинов Г.З. Некоторые осесимметричные задачи для упругой неоднородной толстостенной трубы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2008. №2. С. 34–39.

2. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. 178 с.

3. Роганова Н.А., Шарафутдинов Г.З. Приближенный метод решения плоских задач теории упругости неоднородных тел // Машиностроение и инженерное образование. 2009. №3 (20). С. 63–71.

4. Роганова Н.А., Шарафутдинов Г.З. Применение функций комплексного переменного в задачах плоской деформации неоднородных тел // Известия МГИУ. 2008. №1 (10). С. 75–84.

SOME METHODS OF ANALYZING PLANE ELASTICITY PROBLEMS OF INHOMOGENEOUS BODIES

N.A. Roganova, G.Z. Sharafutdinov

We consider a class of problems related to the deformation of a pipe of an inhomogeneous material, its inhomogeneity being caused by the conditions of its synthesis or by other effects. A mathematical model is developed for analyzing the stressed-strained state in two-dimensional elasticity problems of inhomogeneous bodies. New forms of basic equations are derived, and the method of successive approximations for solving this class of problems is suggested. General expressions for the stresses in the form of series are given, and their convergence is verified. Using complex variable functions, analytical expressions for the successive approximations are obtained.

Keywords: theory of elasticity, plane problem, nonhomogeneous materials.