

УДК 539.3

ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ УДАРА УПРУГИХ ТЕЛ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ ПО УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

© 2011 г.

Ю.А. Россихин, В.В. Шамарин, М.В. Шитикова

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

MVS@vgasu.vrn.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматривается задача о нормальном низкоскоростном ударе упругих тел ограниченных размеров по упругой изотропной сферической оболочке, движения которой описываются уравнениями типа Тимошенко. В момент удара в мишени и ударнике зарождаются ударные волны (поверхности сильного разрыва), которые затем распространяются вдоль соударяемых тел в процессе удара. За фронтами этих волн вплоть до границы области контакта решение строится при помощи теории разрывов и одночленных лучевых разложений. В зоне контакта используется нелинейная теория Герца. Для анализа процессов соударения упругого шара или упругого длинного тонкого цилиндрического стержня с закругленным концом со сферической оболочкой получены нелинейные интегродифференциальные уравнения относительно величины, характеризующей сближение ударника и мишени, решение которых строится при помощи степенных рядов с целыми и дробными показателями. Получены зависимости контактной силы от времени при различных значениях радиуса оболочки. Показано, что наибольшее значение контактной силы и время контакта растут с увеличением радиуса кривизны оболочки, что согласуется с экспериментальными данными.

Ключевые слова: волновая теория удара, сферическая оболочка, лучевой метод, контактная теория Герца, низкоскоростной удар.

Введение

Задача об ударе твердого тела по упругой изотропной сферической оболочке неоднократно рассматривалась разными авторами, при этом использовались различные модели контактного взаимодействия [1–4]. Так, в [1] контактная сила моделировалась при помощи пружины и демпфера, соединенных последовательно, при этом местное смятие оболочки не учитывалось, затем оно было учтено в [2]. В [3] решение задачи об ударе шара по бесконечной сферической оболочке, уравнения движения которой не учитывают инерцию вращения и деформации сдвига, сведено к нелинейному интегродифференциальному уравнению относительно величины, характеризующей местное смятие материалов оболочки и шара, затем это использовалось в [4] для определения перемещений во всей возмущенной области сферической оболочки.

В настоящем исследовании с использованием волнового подхода к теории удара [5] и новой формулировки лучевого метода, предложенной в [6] для анализа распространения волновых поверхностей сильного разрыва в тонких упругих телах, построена волновая теория соударения упругих сферических оболочек с упругими телами конечных размеров.

Постановка задачи и определяющие уравнения

Пусть упругий шар с радиусом r_0 и массой m или длинный цилиндрический стержень радиусом r_0 с закругленным концом в виде полусферы с тем же радиусом движется вертикально вниз со скоростью V_0 навстречу упругой сферической оболочке радиуса R и толщиной h . Удар происходит в начальный момент времени $t = 0$. В процессе удара в оболочке зарождаются две ударные «волны-полоски» (поверхности сильного разрыва), распространяющиеся в процессе удара вдоль оболочки со скоростями упругих волн

$$G_1 = \sqrt{E/\rho(1-\sigma^2)} \quad \text{и} \quad G_2 = \sqrt{\mu/\rho},$$

где E и μ – модули упругости первого и второго рода, ρ – плотность, σ – коэффициент Пуассона.

За фронтами этих волн вплоть до границы области контакта решение строится при помощи теории разрывов и одночленных лучевых разложений [5, 6]. В зоне контакта используется нелинейная теория Герца. Для анализа процессов соударения упругого шара или упругого длинного тонкого цилиндрического стержня с закругленным концом со сферической оболочкой получены соответственно следующие нелинейные интегродифференциальные уравнения относительно

величины α , характеризующей сближение ударника и мишени:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \rho \alpha^{1/2} \left(\ddot{\alpha} + \frac{k}{m} \alpha^{3/2} \right) + \frac{k}{2\pi h R} \alpha \right] \left(\frac{R'}{R} \alpha + R \right) + \\ & + \frac{\rho}{\sqrt{R'}} \left(G_1 \frac{R'}{R} \alpha + G_2 R \right) \left(\dot{\alpha} + \frac{k}{m} \int_0^t \alpha^{3/2} dt \right) + \\ & + \frac{1}{2} \rho (G_1 - G_2) \sqrt{R'} \dot{\alpha} = \frac{\rho V_0}{\sqrt{R'}} \left(G_1 \frac{R'}{R} \alpha + G_2 R \right), \quad (1) \\ & \left[\frac{1}{2} \rho \left(\alpha^{1/2} \ddot{\alpha} + \frac{k}{2\pi \rho_0 G_0 R'} \dot{\alpha} \right) + \frac{k}{2\pi h R'} \alpha \right] \times \\ & \times \left(\frac{R'}{R} \alpha + R \right) + \frac{\rho}{\sqrt{R'}} \left(G_1 \frac{R'}{R} \alpha + G_2 R \right) \times \\ & \times \left(\dot{\alpha} + \frac{k}{2\pi \rho_0 G_0 R'} \alpha^{1/2} \right) + \frac{1}{2} \rho (G_1 - G_2) \sqrt{R'} \dot{\alpha} = \\ & = \frac{\rho V_0}{\sqrt{R'}} \left(G_1 \frac{R'}{R} \alpha + G_2 R \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где $G_0 = \sqrt{E_{im}/\rho_0}$ – скорость упругой волны в стержне, E_{im} , σ_{im} и ρ_0 – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала ударника,

$$\begin{aligned} k &= \frac{4\sqrt{R'}}{3\pi(k' + k'')}, \quad k' = \frac{1 - \sigma^2}{E}, \\ k'' &= \frac{1 - \sigma_{im}^2}{E_{im}}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Получены аналитические решения этих уравнений при помощи степенных рядов с целыми и дробными показателями, анализ которых показывает, что наибольшее значение контактной силы и время контакта растут с увеличением радиуса кривизны оболочки, что согласуется с экспериментальными данными [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-01-92004-ННС_а.

Список литературы

1. Шамберов В.Н. Фрикционные колебания в динамических системах // IX Всерос. съезд по теоретич. и прикладной механике. Нижний Новгород, 22–28 авг. 2006. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Т. 1. С. 119–120.
2. Шамберов В.Н. Фрикционные автоколебания в механических системах // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 2. С. 24–28.

WAVE THEORY OF IMPACT OF ELASTIC BODIES OF FINITE DIMENSIONS UPON AN ELASTIC SPHERICAL SHELL

Yu.A. Rossikhin, V.V. Shamarin, M.V. Shitikova

The problem on normal low-velocity impact of elastic bodies of finite dimensions upon an elastic spherical shell is studied with considering the changes in the geometrical dimensions of the contact domain. At the moment of impact, shock waves (surfaces of strong discontinuity) are generated in the target, which then propagate along the body during the process of impact. Behind the wave fronts up to the boundary of the contact domain, the solution is constructed with the help of the theory of discontinuities and one-term ray expansions. Nonlinear Hertz's theory is employed within the contact region. For the analysis of the processes of shock interactions of an elastic sphere with a spherical shell, a nonlinear integral-differential equation has been obtained with respect to the value characterizing the local indentation of the impactor into the target, which has been solved analytically in terms of time series with integer and fractional powers. The time dependence of the contact force has been determined for different values of the shell radii. It is shown that the maximal values of the contact force and duration increase with the increase in the shell curvature, which is in agreement with the experimental data.

Keywords: wave theory of impact, spherical shell, ray method, Hertz's contact theory, low-velocity impact.