УДК 534.1

ПРОХОЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧЕРЕЗ СЛОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

 Е.И. Свешникова

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

sveshn@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматривается задача о прохождении сдвиговых одномерных периодических возмущений через слой нелинейно-упругой среды в условиях, близких к резонансу. Слой разделяет два полупространства, состоящих из среды существенно более жесткой, чем среда внутри упомянутого слоя. Это позволяет считать заданными движения одной из границ слоя и определять напряжения на другой границе, считая ее неподвижной. Получена система дифференциальных уравнений, описывающая медленные изменения амплитуды и формы нелинейных колебаний деформаций и напряжений на неподвижной границе вследствие проявления нелинейных свойств среды, в то время как другая граница слоя совершает произвольные периодические движения в своей плоскости. Период этих колебаний близок к периоду собственных колебаний слоя. Показано, что наряду с непрерывными формами изменения деформаций на неподвижной границе возможны изменения величин деформаций, содержащие сильные разрывы. Получены соотношения на разрывах. Указана аналогия между полученными уравнениями и уравнениями, описывающими распространение волн деформации по некоторой однородной анизотропной упругой среде.

Ключевые слова: нелинейная упругая среда, плоские волны сдвига, резонанс, периодические нелинейные колебания, разрывы, медленное время, медленная эволюция волн.

Изучается прохождение колебаний через слой шириной L однородной нелинейно-упругой слабоанизотропной среды, находящийся между двумя полупространствами, состоящими из упругой более жесткой среды, чем внутри слоя. Считается, что отношение жесткостей слоя и окружающей его среды представляет малый параметр, который будет использоваться при построении решения. Выбираем ось x перпендикулярной границам слоя. Из жесткого полупространства $L \le x < \infty$ на границу $x = L$ падает линейная одномерная периодическая волна. В нулевом приближении она отражается от границы как от свободной поверхности, а сама граница приобретает периодическое движение в своей плоскости с малыми амплитудами $v_i = \psi_i(t)$ и периодом T. Это ведет к возбуждению колебаний внутри слоя $0 \le x \le L$. Вторая граница слоя в нулевом приближении считается неподвижной. Предполагается, что период колебаний близок к периоду собственных поперечных колебаний слоя. Многократно отражаясь поочередно от границ в режиме, близком к резонансному, поперечные упругие волны претерпевают нелинейное изменение. В результате в каждом направлении оси x распространяются два типа плоских волн сдвига, их скорости различаются на величину, определяемую влиянием нелинейности и анизотропии, которые считаются малыми. Таким образом, режим, близкий к резонансу, осуществляется одновременно для обоих типов волн. При этом считается, что продольная волна, имеющая существенно отличную скорость, в резонансе не участвует и на взаимодействие поперечных волн не влияет. Это позволяет рассматривать среду как несжимаемую.

Решение поставленной задачи о колебаниях внутри слоя в нулевом приближении служит для отыскания на неподвижной границе $x = 0$ напряжений, представляющих граничные условия для определения возмущений во втором жестком полупространстве. Задача об одномерных колебаниях внутри ограниченной области достаточно хорошо изучена для волн в газе в закрытой трубе [1–3], рассматривалась она также и для упругих волн [4, 5]. Но во всех случаях в каждом направлении распространялся один тип волн. В [6, 7] и в настоящей работе в процессе участвуют два типа взаимодействующих между собой волн сдвига.

Деформации, изменяющиеся в рассматриваемых волнах, характеризуются двумя компонентами градиента поперечных перемещений $u_i(x, t) = \partial w_i/\partial x$, $i = 1, 2$ (w_i – компоненты перемещения). Система уравнений для одномерных волн в лагранжевых переменных имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad i = 1,2. \quad (1)$$

Здесь $v_i(x, t) = \partial w_i/\partial t$ – компоненты скорости. Для замыкания системы задается упругий потенциал среды $\Phi(u_1, u_2)$. Среда считается слабонелинейной, так что u_i имеет порядок ε. Упругий потенциал Φ задается разложением по малым компонентам деформации с удержанием первых, главных членов, выявляющих нелинейность и анизотропию. Гиперболическая система (1) описывает распространяющиеся в каждом направлении две плоские волны сдвига, у которых различие характеристических скоростей имеет порядок ε^2. Введение величины $a = 2L/T$, которая мало (на ε^2) отличается как от скоростей обеих волн, так и от скорости линейной волны, позволило с точностью до ε^3 проинтегрировать уравнения (1) за период T для каждой из волн вдоль соответствующих характеристик. В [6, 7] получены осредненные за период уравнения, описывающие эволюцию с ростом числа отражений компонент деформации u_1, u_2 на границе $x = 0$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right) = \frac{\psi_i(\xi)}{L}, \quad \xi = at = 2Lt/T. \quad (2)$$

Уравнения имеют гиперболический тип и являются аналогом уравнений для волн, распространяющихся в однородной упругой среде только в одном направлении оси x. При этом найденная в результате интегрирования функция F служит аналогом упругого потенциала. Она представлена многочленом по степеням u_1, u_2 того же вида, что и упругий потенциал среды Φ, но коэффициенты этого многочлена зависят от решения, осредненного за период, предшествующий рассматриваемому $F = F(u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \overline{u_1 u_2})$. В уравнениях (2) τ – медленное время, пропорциональное числу отражений. Для гиперболических уравнений (2) возможны разрывные решения. Получены соотношения на разрывах, следующие из законов сохранения

$$W[u_i] - \left[\frac{\partial F}{\partial u_i}\right] = 0, \quad W = \frac{d\xi}{d\tau}.$$

Для системы уравнений (2) рассмотрены решения, стационарные в режиме медленного времени, когда $\partial/\partial\tau = 0$, и следовательно, периодические по t.

Первый тип задач состоит в том, чтобы указать, каким должно быть малое движение колеблющейся границы, чтобы на другой границе $x = 0$ поддерживать произвольно заданные деформации $u_i(\xi, \tau)$. В этом случае в уравнениях (2) известны левые части и решением являются функции ψ_i, стоящие в правых частях.

Во втором типе задач задаются периодические колебания границы $x = L$. Исследование показало, что на другой, неподвижной границе $x = 0$ возникают периодические решения (для которых $\partial/\partial\tau = 0$), которые могут быть как непрерывными, так и содержащими скачки, удовлетворяющие условиям эволюционности разрыва. Рассмотрены поправки к колебаниям слоя, происходящие в результате учета введенного выше малого параметра в первом приближении.

Работа выполнена совместно с А.Г. Куликовским.

Работа поддержана РФФИ, гранты №11-01-00188, 11-01-00034.

Список литературы

1. Chester W.J. // Fluid Mech. 1964. V. 18, pt. 1. P. 44–64.
2. Гусев В.Э. // Акуст. журн. 1984. Т. 30, №2. С. 204–212.
3. Руденко О.В., Хедберг С.М., Энфло И.О. // Акуст. журн. 2001. Т. 47, №4. С. 525–533.
4. Сибгатуллин Н.Р. // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 79–87.
5. Руденко О.В., Хедберг С.М., Энфло И.О. // Акуст. журн. 2007. Т. 53, №4. С. 522–532.
6. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 1040–1050.
7. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 6. С. 985–995.

TRANSMISSION OF OSCILLATIONS THROUGH A LAYER OF A NONLINEAR ELASTIC MEDIUM

E.I. Sveshnikova

The transmission of shear one-dimensional periodic perturbations through a layer of a nonlinearly elastic medium under the conditions close to resonance is considered. The layer separates two half-spaces consisting of a medium that is much more rigid, as compared to the medium in the layer. A system of differential equations is obtained for describing the slow variations in the amplitude and waveform of nonlinear strain and stress oscillations at the fixed boundary that occur because of the nonlinear properties of the medium while the other boundary performs arbitrary periodic motions in its plane. The period of these oscillations is close to the period of natural oscillations of the layer. It is shown that, in addition to continuous strain variations at the fixed boundary, strain variations containing strong discontinuities are possible. Relations at the discontinuities are obtained. The analogy between the equations derived for the case under study and the equations describing the propagation of strain waves in a homogeneous anisotropic elastic medium is pointed out.

Keywords: nonlinearly elastic medium, shear plane waves, resonance, periodic nonlinear oscillations, discontinuity, slow time, slow evolution of waves.