УДК 531.1

ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРИ РЕЗОНАНСЕ В СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В.С. Сергеев

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

vsergeev@ccas.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматриваются движения, которые при неограниченном возрастании времени стремятся к периодическим режимам. В критическом случае пары чисто мнимых корней для уравнений движения с голоморфной правой частью и аддитивным малым возмущением, периодически (предельно периодически) зависящим от времени, при условии необращения в ноль постоянной Ляпунова g_3, определяемой по членам до 3-го порядка, первым методом Ляпунова строится семейство предельно периодических решений при резонансе, когда частота внешнего возмущения совпадает с собственной частотой линеаризованной невозмущенной системы.

Ключевые слова: нелинейные колебания, интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра, критический случай пары чисто мнимых корней, резонанс.

Рассматриваются системы с последействием, описываемые уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau + \mu f(t) + F(x), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, μ – малый параметр, A – постоянная $(n\times n)$-матрица, $K(t)$ –непрерывная $(n\times n)$-матрица, заданная при $t \geq 0$ и удовлетворяющая неравенству

$$\|K(t)\| \leq C\exp(-\beta t), \quad C > 0, \quad \beta > 0 - \text{const},$$

$F(x)$ – аналитическая в некоторой окрестности нуля функция, представимая степенным рядом без свободного и линейного членов, функция $f(t) \in C^1$.

Используется следующее ***определение***: непрерывную функцию $\varphi(t)$ будем называть предельно периодической, если она представляется в виде суммы

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + \varphi_e(t),$$

где $\varphi_p(t)$ – периодическая функция и $\varphi_e(t)$ – функция, стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$.

Движение, описываемое предельно периодической функцией, будем называть предельно периодическим.

Функция $f(t)$ в уравнении (1) считается предельно периодической.

Предполагается, что характеристическое уравнение для уравнения (1) имеет в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geq -\beta$ конечное число корней λ'_j $(j = 1,\ldots, N;\ N \geq n)$, пронумерованных в порядке возрастания вещественных частей, причем

$$\mathrm{Re}\lambda'_j < 0, \quad \lambda'_{N-1} = i\omega, \quad \lambda'_N = -i\omega,$$
$$j = 1,\ldots, N-2, \quad \omega = \text{const} > 0.$$

Будем считать, что производная функции $f(t)$ имеет ограниченное изменение и периодическая часть $f_p(t)$ функции представляется абсолютно сходящимся рядом Фурье с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Проведем серию преобразований [1], выделяющую критическую подсистему и позволяющую по членам 3-го порядка правых частей уравнений, не зависящих от параметра μ, определить постоянную Ляпунова g_3 и представить критическую и некритическую подсистемы в следующей форме:

$$\frac{dw'_{n-1}}{dt} = h_{n-1}w'^2_{n-1}\, w'_n + W^{(2)}_{n-1}(u, w', t) +$$
$$+ W^{(3)}_{n-1}(u, w', t) + \mu f'_{n-1}(t) + \mu W_{n-1}(u, w', t, \mu),$$
$$\frac{dw'_n}{dt} = h_n w'_{n-1}\, w'^2_n + W^{(2)}_n(u, w', t) +$$
$$+ W^{(3)}_n(u, w', t) + \mu f'_n(t) + \mu W_n(u, w', t, \mu), \quad (2)$$

$$h_{n-1}, h_n = \text{const}, \quad w' = \mathrm{col}(w'_{n-1}, w_n),$$
$$\Lambda'_2 = \mathrm{diag}(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{n-1}),$$
$$\frac{du}{dt} = \Lambda'_2\, u + U^{(2)}(u, w', t) +$$
$$+ U^{(3)}(u, w', t) + \mu f'(t) + \mu U(u, w', t, \mu), \quad (3)$$

где $W^{(2)}_j(u, w', t)$, $U^{(2)}_j(u, w', t)$ – квадратичные по u, w' члены, такие, что $W^{(2)}_j(0, w', t) \equiv 0$, $U^{(2)}_j(0, w', t) \equiv 0$ $(j = n-1, n)$, $W^{(3)}_j(u, w', t)$ –члены более 2-го порядка, не содержащие кубических членов, зависящих только от w'_{n-1}, w'_n [1]; $f'(t) = \mathrm{col}(f'_1(t),..., f'_{n-2}(t))$, $f'_{n-1}(t)$, $f'_n(t)$ – предельно периодические функции и их периодические части $f'_{jp}(t)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье; операторы $W_j^{(2)}(u, w', t, \mu)$, $U_j(u, w', t, \mu)$ в (2) и (3) – величины 2-го порядка по u, w'.

Уравнения (2) для $j = n - 1$ и $j = n$, так же как и переменные w'_{n-1}, w'_n, являются комплексно-сопряженными. Будем считать, что вещественная постоянная

$$h_{n-1}h_n \neq 0.$$

В уравнения (2), (3) вводится малый параметр ε с помощью замены

$$w'_j = \varepsilon v_j, \quad j = n-1, n, \quad u = \varepsilon v, \quad \mu = \varepsilon^3,$$

где $v = \mathrm{col}(v_1,..., v_{n-2})$, и последовательно строится семейство предельно периодических решений этих уравнений в форме степенных рядов по ε, так что

$$v_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_i^{(k)}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и начальным значениям v_{i0} функций $v_i(t)$. При этом начальные значения v_{0k} представляются в виде степенных рядов

$$v_{0k}(\varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p v_{0k}^{(p)}, \quad k = n-1, n.$$

Семейство предельно периодических решений уравнений (2), (3) может быть построено, содержит $n - 2$ произвольные постоянные и представляется степенными рядами по $n - 2$ начальным значениям некритических переменных и малому параметру $\varepsilon = \mu^{1/3}$. Проведенные преобразования от переменной x в уравнении (1) к переменным w_j ($j = n - 1$, n), u уравнений (2), (3) позволяют сделать заключение о существовании семейства предельно периодических решений уравнения (1).

Абсолютная сходимость рядов доказывается методом мажорантных функций построением соответствующих мажорирующих уравнений. Вычислена в первом приближении амплитуда периодической части предельно периодического движения.

Дается обобщение рассмотренной задачи. Приводится пример существования предельно периодических движений в задаче о качении железнодорожной колесной пары в резонансном случае в постановке, указанной в [2], учитывающей нелинейные силы крипа и вязкоупругие свойства материала.

Для дифференциальных уравнений (в уравнении (1) интегральное ядро $K(t) \equiv 0$) полученный результат трансформируется в следствие о существовании в резонансном случае периодических решений, устанавливаемых по членам 3-го порядка. Вопрос о существовании периодических решений при допущении о разрешимости амплитудных уравнений общей формы рассматривался в [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 08-01-00600.

Список литературы

1. Сергеев В.С. // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 79–86.
2. Сергеев В.С. // Автоматика и телемеханика. 2009. №9. С. 157–161.
3. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1956. 491 с.

LIMITING PERIODIC MOTIONS WITH RESONANCE IN SYSTEMS DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.S. Sergeev

Motions which tend to periodic oscillations with time are considered. The critical case of a pair of pure imaginary roots is analyzed by the first Lyapunov's method for equations with analytical nonlinear parts and Lyapunov's constant $g_3 \neq 0$. The existence of a family of limiting periodic solutions is proved for the case when the frequency of external small perturbations coincides with the fundamental frequency of the linearized unperturbed system.

Keywords: nonlinear oscillations, integrodifferential equations of the Volterra type, critical case of pair of pure imaginary roots, resonance.