

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ МНОГОУРОВНЕВЫЕ СВЯЗАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ

© 2011 г.

Ю.В. Соколкин, Е.Ю. Макарова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

dopstu@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Для прогнозирования упругих и прочностных свойств композитов рассматривается постановка нелинейных многоуровневых связанных краевых задач механики композитов, учитывающая стадию структурного накопления микроповреждений. Современные тенденции развития нанотехнологий свидетельствуют об актуальности развития данного подхода в связи с созданием гибридных композитов. Для описания структурного разрушения, расчета траекторий деформирования и прогнозирования прочностных свойств композитов в определяющие соотношения вводится новый материальный носитель – функция поврежденности четвертого ранга, зависящая от условий нагружения. Для замыкания системы уравнений приводятся дополнительные уравнения, связывающие тензор структурных повреждений с инвариантами тензоров структурных напряжений и деформаций. В случае изотропного тензора микроповрежденности четвертого ранга используются критерии хрупкого и вязкого разрушения. Разработана теория накопления структурных повреждений в микронеоднородной среде, устанавливающая однозначную связь между инвариантными мерами структурного и макроскопического разрушения. Методом периодических составляющих построен новый функционал нелинейной связанной стохастической краевой задачи, позволяющий наряду с прогнозированием эффективных упругих свойств строить расчетные поверхности прочности реальных композитов.

Ключевые слова: нелинейные многоуровневые связанные краевые задачи, структурные микроповреждения, структурное разрушение, эффективные упругие свойства, прочностные свойства, макроскопическое разрушение.

Для прогнозирования упругих и прочностных свойств композитов рассматривается постановка нелинейных многоуровневых связанных краевых задач механики композитов, учитывающая стадию структурного накопления микроповреждений. Для описания структурного разрушения, расчета траекторий деформирования и прогнозирования прочностных свойств композитов в определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров микронапряжений $\sigma_{ij}(r)$ и микродеформаций $\varepsilon_{ij}(r)$, наряду с тензором структурных модулей $\theta_{ijmn}(r)$ вводится новый материальный носитель – тензор микроповреждений $\omega_{ijmn}(\sigma_h, \varepsilon_h, r)$, зависящий от инвариантов тензоров структурных напряжений σ_h и деформаций ε_h ($h = 1, 2, 3$):

$$\sigma_{ij}(r) = \theta_{ijmn}(r)[I_{mnpq} - \omega_{mnpq}(\sigma_h, \varepsilon_h, r)]\varepsilon_{pq}(r),$$

где $I_{ijmn} = 1/2\theta_{ijmn}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$ – единичный тензор четвертого ранга, δ_{ij} – единичный тензор второго ранга.

Таким образом, в качестве математической модели процесса квазистатического деформирования и разрушения ставится детерминированная или стохастическая задача механики композитов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0, \quad \sigma_{ij}(r) = \\ &= \theta_{ijmn}(r)[I_{mnpq} - \omega_{mnpq}(\sigma_h, \varepsilon_h, r)]\varepsilon_{pq}(r), \\ \varepsilon_{ij}(r) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ u_i(r)|_{\Gamma_u} &= u_i^0, \quad \sigma_{ij}(r)n_j|_{\Gamma_\sigma} = S_i^0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_i(r)$ – структурные перемещения, S_i^0 и u_i^0 – соответственно заданные поверхностные нагрузки и граничные перемещения.

Система уравнений (1) является незамкнутой. Для замыкания системы уравнений привлекаются дополнительные уравнения, связывающие тензор структурных повреждений с инвариантами тензоров структурных напряжений и деформаций

$$\omega_{ijmn}(r) = \omega_{ijmn}(\sigma_h, \varepsilon_h, r). \quad (2)$$

В случае изотропного тензора микроповрежденности четвертого ранга используются критерии хрупкого и вязкого разрушения, описываемые уравнениями первой и третьей теорий прочности в трактовке В.В. Новожилова. Разработана теория накопления структурных повреждений в

микронеоднородной среде, устанавливающая однозначную связь между инвариантными мерами структурного и микроскопического разрушения.

На стадии дисперсного накопления микрповреждений поля структурных модулей упругости и структурных повреждений являются локально-эргодическими. В этом случае устанавливается связь между пульсациями структурных деформаций $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}(r)$ и структурными деформациями $\varepsilon_{ij}^{(p)}(r)$ в регулярной среде сравнения посредством функционала $\Phi_{ijmn}^{(p)}(\theta, \omega)$:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}(r) = \Phi_{ijmn}^{(p)}(\theta, \omega) \varepsilon_{mn}^{(p)}(r). \quad (3)$$

На основе соотношения (2) удастся построить замкнутую систему уравнений краевой задачи (1) на макроуровне.

Переход с одного структурного уровня на другой, более высокий структурный уровень осуществляется на основе моделей осреднения. Рассматриваются следующие модели осреднения стохастических краевых задач [1–3]:

1) традиционный метод осреднения, когда средой сравнения является однородная изотропная или анизотропная среда;

2) метод периодических составляющих, когда средой сравнения является микронеоднородная среда с регулярной структурой;

3) численный метод локального приближения, основанный на учете ближнего порядка в расположении и во взаимодействии элементов структуры;

4) метод периодических составляющих в сочетании с методом локального приближения. Рассматриваются этапы решения стохастических краевых задач.

Решение краевой задачи (1) сводится к пяти последовательным этапам, тесно связанным друг с другом [1–3]. На первом этапе строится микроскопическая модель среды. На этом этапе прогнозируются эффективные модули упругости композита. На втором этапе определяется макроскопическое напряженно-деформированное состояние конструкции. На третьем этапе определяются

поля микронапряжений и микродеформаций. На четвертом этапе рассчитываются траектории деформирования и поля микро- и макроповрежденности. На пятом этапе строятся предельные поверхности прочности и дается оценка надежности элементов конструкции.

Представлены результаты расчета нелинейных полей деформирования и разрушения однонаправленных волокнистых композитов с гексагональной и тетрагональной укладкой волокон в матрице. Диаграммы деформирования получены для однонаправленных волокнистых стекло-, боро-, угле- и органопластиков при различных условиях двухосного трансверсального сжатия. В большинстве случаев зависимости являются нелинейными, что обусловлено возникновением и развитием в матрице равновесных зон разрушения, в которых материал сопротивляется гидростатической сжимающей нагрузке, но не сопротивляется сдвигу. Предельные поверхности прочности показывают, что при тетрагональной укладке волокон разрушение начинается раньше ввиду более высоких коэффициентов концентрации напряжений, однако здесь равновесные зоны разрушения развиваются в более широком диапазоне нагрузок и окончательное значение прочности композита с тетрагональной структурой выше значений, полученных для материала с гексагональной структурой.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ-Урал (№10-01-96047-р_урал_а).

Список литературы

1. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М.: Наука, 1984. 116 с.
2. Соколкин Ю.В. и др. Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций. М.: Наука, Физматлит, 1996. 239 с.
3. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / Под ред. Ю.В. Соколкина. М.: Наука, 1997. 288 с.

NONLINEAR MULTILEVEL COMBINED BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF DEFORMATION AND FAILURE MECHANICS OF COMPOSITES

Yu. V. Sokolkin, E. Yu. Makarova

Nonlinear multilevel combined boundary-value problems for composite mechanic are considered to predict elastic and strength properties of composites. They take into account the stage of the structure damage accumulation. Nanotechnology tendencies suggest that the development of nonlinear multilevel combined boundary-value problems is vital in view of the development of hybrid composites. To describe structural failure, calculate the deformation trajectories and predict the strength properties of composites, a new material object is used, that is a fourth rank damage function depending on the loading conditions. The supplementary conditions, which relate the structure damage tensor with invariants of the structure stress and

strains tensors are written to close the equation system. For isotropic fourth-rank micro-damage tensor the brittle and viscous criteria are used. A theory of the structure damage accumulation in micro-heterogeneous solids is developed. It establishes unique relations between invariant measures of structural and macroscopic failure. Using the periodic component method, a new functional of the nonlinear combined boundary-value problem is constructed. It allows predicting effective elastic properties and constructing strength surfaces of real composites.

Keywords: nonlinear multilevel combined boundary-value problems, structure damages, structural destruction, effective elastic properties, macroscopic failure.