

УДК 539.3

ДИНАМИКА ЛОКАЛИЗАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕСТРОЙКИ СТРУКТУРЫ НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

© 2011 г.

М.Д. Стерлин

Санкт-Петербургский госуниверситет

mike-st@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Проведено моделирование взаимозависимых процессов связывания примеси решеткой, фазово-структурных изменений, массопереноса примеси в каждой фазе и термоупругости при деформировании тел с включениями и вторичной структурой. В разработанной ранее математической модели связывания примеси решеткой однородного материала волновые уравнения движения заменены нелинейными уравнениями Клейна–Гордона, а уравнения баланса массы заменены нестационарными уравнениями Гинзбурга–Ландау. Даны методы учета серий волн, прошедших и многократно отраженных от границ включений. Созданы аналитические и вычислительные методы, пригодные для решения соответствующих краевых задач. Проанализированы полученные численные решения. Для подобных линейных задач даны точные решения в виде разложений по явно выписанным собственным функциям дискретного и непрерывного спектра. Анализ входящих в них интегралов по непрерывному спектру подтвердил динамику численных решений. Выявлены эффекты интенсивного роста и осцилляции на включениях напряжений, концентраций подвижной примеси и скоростей фазово-структурных превращений.

Ключевые слова: деформирование, фазово-структурные изменения, включения, массоперенос, связывание примеси, точное решение.

Введение

Воздействие примесей на решетку материала обычно приводит к кардинальным изменениям ее структуры и ухудшению механических свойств (например, при водородном охрупчивании металлов или окислении). В [1] была поставлена задача адекватного описания подобных процессов с учетом взаимосвязи основных факторов. Для однородного материала с примесью вопрос был изучен в [2]. В настоящем исследовании предложена новая модель, пригодная для изучения роли включений (с иными физическими свойствами) и оценки влияния вторичной структуры, оказывающей сопротивление деформированию материала.

Математическая модель

Назовем средой 1 решетку и связанную ею часть примеси. Свободную часть примеси считаем средой 2. Уравнения движения, баланса массы и теплопроводности приводят к следующей модели:

$$\begin{aligned} & \nabla(K\varepsilon) + \nabla \cdot s = \\ & = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \nabla(K(T - T_0)) + F(u), \quad (1) \\ & \frac{\partial n_k}{\partial t} = \nabla \cdot (D_k(T)(1 - b\varepsilon) \nabla n_k) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \nabla \cdot (D_k^T(n_k)(1 - b\varepsilon) \nabla T) + \\ & + (-1)^k I \left(n_1, n_2, \varepsilon, \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, T \right), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} & = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - K\alpha T \nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \\ K & \equiv K(n_1) = \frac{K_0}{1 + n_1(x,t)K_0/K_1}. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь u – перемещение, s – девиаторное напряжение, ε – шаровая деформация, ρ – плотность, T – абсолютная температура, α – коэффициент температурного расширения, c – удельная изобарная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности в среде 1; n_k – относительная концентрация примеси, $D_k(T)$, $D_k^T(n_k)$ – коэффициенты ее диффузии и термодиффузии в k -й среде; b – коэффициент влияния деформации на сужение «каналов»; модули всестороннего сжатия: K – текущий для материала, K_0 – его решетки, K_1 – примеси; x – координаты, t – время; $F(u)$ учитывает сопротивление вторичной внутренней структуры деформированию тела; функция I учитывает характер возможного обмена примесью между средами в каждой точке при встраивании примеси в решетку, более мягком связывании примеси либо ее высвобождении. В простейших случаях зависимость I от n_k можно считать линейной. В более

сложных случаях следует оставлять члены до третьего порядка. Тогда уравнения (2) обобщают нестационарное уравнение Гинзбурга–Ландау.

К системе (1)–(3) должны быть добавлены необходимые начальные и граничные условия. На границе включений должны быть выполнены условия сопряжения, например в виде непрерывности u , напряжений и нормальных потоков тепла.

Локализованные решения

Система решалась численно. Анализ решений одномерных задач выявил условия, обеспечивающие полную локализацию напряжений на включениях. На рис. 1 показана типичная расчетная динамика для первоначально покоящегося стержня с включением $0.1 < x < 0.15$ при нагружении левого конца стержня $x = 0$ одним полупериодом импульса вида $\sigma(0, t) = \sigma_m \sin^2 at$ в различные моменты времени (указаны на кривых): а) $0 < t < 3$; б) $13 < t < 51$; в) $200 < t < 401$. Рост и колебания напряжений на включениях приводят к пагубному для материала ускорению структурных превращений.

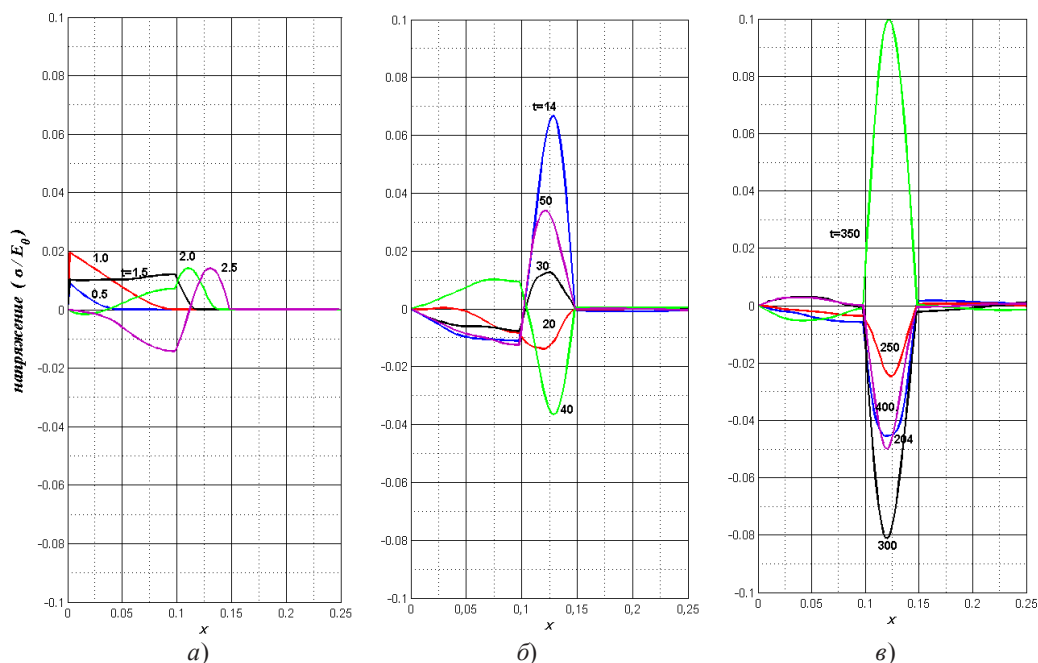


Рис. 1

Точные решения

Подобные линейные задачи сводятся к разрывному уравнению Клейна–Гордона

$$K(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + E(x)u(x, t) \quad (4)$$

с краевыми условиями $u(x, 0) = 0$, $\sigma(0, t) = \sigma_0(t)$, $u(\infty, t) = 0$. Значение $\sqrt{E(x)/\rho(x)}$ на включении обозначим через $\underline{\omega}$, а вне его – через $\overline{\omega}$. Если

$\underline{\omega} < \overline{\omega}$, то между ними лежит дискретный спектр $\{\omega_n^*\}_{n=1}^N$ стационарного оператора, отвечающего уравнению (4). Непрерывный спектр заполняет $(\overline{\omega}, \infty)$. Собственные функции дискретного и непрерывного спектра $\{u_n^*(x)\}_{n=1}^N$ и $\{u_\omega(x)\}_{\omega > \overline{\omega}}$ выпишем в явном виде. Решение исходной задачи (4), например для $\sigma_0(t) = \sin \omega_0 t$, $\omega_0 \neq \omega_n^*$, имеет вид

$$u(x, t) = \sum_n \frac{u_n^*(x)}{C_n^*(\omega_n^{*2} - \omega_0^2)} \left(\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_n^*} \sin \omega_n^* t \right) + \sin \omega_0 t \int_{\overline{\omega}}^{\infty} \frac{u_\omega(x)}{C_\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega - \omega_0 \int_{\overline{\omega}}^{\infty} \frac{u_\omega(x) \sin \omega t}{C_\omega \omega (\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega.$$

Анализ поведения интегралов при $x, t \rightarrow \infty$ с учетом экспоненциального убывания $u_n^*(x)$ показал, что численное решение соответствующей задачи согласуется с указанным точным решением.

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН Д.А. Индейцеву за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН №22П.

Список литературы

1. Болотин В.В. // Докл. РАН. 2000. Т. 372, №6. С. 759–761.
2. Индейцев Д.А., Стерлин М.Д. Динамика перестройки твердого тела при физико-химических воздействиях // Докл. РАН. 2011. Т. 436, №3. С. 328–331.

**LOCALIZATION DYNAMICS OF STRESSES AND THE RESTRUCTURING
OF AN INHOMOGENEOUS MATERIAL**

M.D. Sterlin

The interrelated processes of binding an impurity by a lattice, phase-structural variations, impurity transfer in each phase and thermoelasticity are modeled for deforming bodies with inclusions and a secondary structure. In the earlier model an impurity binding for a homogeneous material the wave equations of movement are replaced by nonlinear Klein–Gordon equations, and the mass balance equations are replaced by non-stationary Ginzburg–Landau equations. A computing technique for multiple wave reflections from inclusions, methods for analyzing boundary problems and the analysis of results are given. The exact solutions in the form of expansions of eigenfunctions with continuous and discrete spectrums are derived for corresponding linear problems. The continuous spectrum analysis of the integrals they include has confirmed the dynamics of the numerical solutions. The effects of intensive growth and oscillation on inclusions of stresses, mobile impurity concentration and speeds of phase-structural transformations are revealed.

Keywords: deformation, phase-structural variations, inclusions, mass transfer, impurity binding, exact solution.