УДК 532.529

НОВЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

В.С. Суров, Е.Н. Степаненко

Южно-Уральский госуниверситет, Челябинск

svs@csu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Обсуждается ряд новых гиперболических моделей односкоростных многофазных сред, учитывающих наличие теплопроводности и вязкости. Также рассмотрена гиперболическая модель течения грунтовых вод в пористой среде. Для каждой из рассмотренных моделей предложены методы расчета, с использованием которых решены различные модельные задачи.

Ключевые слова: односкоростная вязкая многокомпонентная среда, гиперболические системы, численное моделирование.

Разработка математически корректных и физически непротиворечивых моделей многофазных сред является актуальной задачей, поскольку не все существующие к настоящему времени общие модели гетерогенных сред являются таковыми. В частности, при рассмотрении явления распространения тепла в односкоростных гетерогенных средах [1] с привлечением закона Фурье оказывается, что тепловые волны обладают бесконечными скоростями распространения. Если же вместо закона Фурье использовать закон Максвелла–Каттанио, учитывающий релаксацию теплового потока, то тепловые волны в среде распространяются с конечными скоростями и указанное выше противоречие нефизического характера исчезает, что, в свою очередь, связано со сменой типа уравнений – от параболического к гиперболическому [2].

Односкоростная вязкая многокомпонентная среда

Включение сил вязкого трения в уравнения модели односкоростной многокомпонентной среды из [1] на уровне смеси в целом также приводит к появлению решений с бесконечно большими скоростями распространения возмущений. Представлена новая гиперболическая модель односкоростной вязкой многокомпонентной среды, в которой по аналогии с подходом Максвелла–Каттанио в теплопередаче учтена релаксация вязких напряжений. Для упрощения в общей системе опустим члены, ответственные за фазовые, химические и другие превращения. Система уравнений вязкой n-компонентной смеси с первыми m сжимаемыми фракциями, в которых учтены силы межфракционного взаимодействия, после ряда преобразований, аналогичных проделанным в [1], принимает вид:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\quad \frac{D\mathbf{u}}{Dt}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}(p-\sigma)=0,$$
$$\frac{Dp}{Dt}-c^2\frac{D\rho}{Dt}=0,\quad \tau_\sigma\frac{D\sigma}{Dt}-\frac{\mu}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\sigma=0;$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\frac{1}{\rho_i^0}\frac{D\rho_i^0}{Dt}+\frac{1}{\alpha_i}\frac{D\alpha_i}{Dt}=0, \tag{1}$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\frac{\rho_i^0}{p}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial p}\frac{Dp}{Dt}+\frac{\rho_i^0}{p}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\frac{D\rho_i^0}{Dt}=0,$$
$$i=1,\ldots,m-1;$$
$$\frac{D\alpha_j}{Dt}-\frac{\alpha_j}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=0,\quad j=m+1,\ldots,n,$$

где

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla),$$
$$c=\left\{\frac{p-\sigma}{\rho}-\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}-\sum_{i=1}^{m-1}\left\{\frac{p}{\rho_i^0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_i^0}\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1}+\right.\right.$$
$$\left.+\alpha_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i}\left[1-p\left((\rho_i^0)^2\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1}\right]\right\}-$$
$$\left.-\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_j}\right\}^{1/2}\left\{\rho\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial p}\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\alpha_i}{\rho_i^0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_i^0}\right)\right]\right\}^{-1/2}.$$

Обозначения в (1) те же, что в [1]. Характеристическое уравнение системы (1)

$$(\xi - u)^{n+m}[\xi - (u - c_*)][\xi + (u - c_*)] = 0$$

имеет только действительные корни. Здесь $\xi = dx/dt$. Кроме того, собственные векторы, соответствующие корням характеристического уравнения, линейно независимы, поэтому система квазилинейных уравнений (1) при $\tau_\sigma \neq 0$ – гиперболическая.

Для частного случая одномерных течений среды, состоящей из двух сжимаемых фракций, выражение для скорости звука в смеси имеет вид

$$c_* = \sqrt{c^2 + \frac{\mu}{\rho\tau_\sigma}}.$$

Видно, что при $\tau_\sigma \to 0$ скорости перемещения возмущений в рассматриваемой среде стремятся к бесконечности.

Для интегрирования уравнений модели течения вязкой среды использованы численные методы, с помощью которых решен ряд модельных задач: сеточный метод характеристик, ранее использованный для интегрирования теплопроводной смеси [3]; метод Куранта–Изаксона–Риса.

Течение грунтовых вод в пористой среде

Гиперболическая модель течения грунтовых вод в пористой среде описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \tau\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\mu\frac{\partial p}{\partial x} - \xi, \\ p = \rho g h + \text{const}. \end{gathered} \qquad (2)$$

Систему (2) перепишем в векторно-матричной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}, \qquad (3)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & h \\ a & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta u \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ имеет действительные собственные значения $u + \sqrt{ah}$, $u - \sqrt{ah}$. Здесь $a = \mu g h/\tau$. Кроме того, справедливо равенство $\mathbf{A} = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$, где

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{\dfrac{h}{a}} \\ \sqrt{\dfrac{a}{h}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{\dfrac{h}{a}} \\ \sqrt{\dfrac{a}{h}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u - \sqrt{ah} & 0 \\ 0 & u + \sqrt{ah} \end{pmatrix},$$

что свидетельствует о гиперболичности системы (3). Если же использовать оригинальный закон Дарси с $\tau = 0$, то, как следует из приведенных ранее формул, скорости перемещения возмущений становятся бесконечно большими.

Список литературы

1. Суров В.С. Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболичным адиабатическим ядром // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, №6. С. 1111–1125.

2. Суров В.С. Гиперболическая модель односкоростной многокомпонентной теплопроводной среды // ТВТ. 2009. Т. 47, №6. С. 905–913.

3. Суров В.С., Степаненко Е.Н. Сеточный метод характеристик для расчета течений односкоростной многокомпонентной теплопроводной среды // Вестник Челябинского госуниверситета. Сер. Физика. 2010. Вып. 8, №24 (205). С. 15–22.

NEW HYPERBOLIC MODELS IN THE MECHANICS OF MULTIPHASE MEDIA

V.S. Surov, E.N. Stepanenko

A series of new hyperbolic models of one-high-velocity multiphase mediums is considered, taking into account the presence of thermal conduction and viscosity. Hyperbolic model of a ground water flow in a porous medium is also considered. For each of the considered models the methods of account are offered, which are used to analyze various model tasks.

Keywords: one-velocity viscous multi-component medium, hyperbolic systems, numerical modeling.