

УДК 678.5–419.8

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

© 2011 г.

С.Н. Сухинин

Центральный НИИ машиностроения, г. Королев

ssukhinin@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Приводятся математическое моделирование и построение физических моделей для исследования устойчивости трехслойных композитных оболочек с многослойными несущими слоями и заполнителем. Проведен статистический анализ результатов испытаний и даны рекомендации по определению поправочных эмпирических коэффициентов.

*Ключевые слова:* трехслойная конструкция, композиты, анизотропия, критические усилия, поправочные эмпирические коэффициенты, статистический анализ.

Исследуется устойчивость трехслойных композитных оболочек с легким заполнителем. Для конкретности рассматривается самый характерный случай: цилиндрическая оболочка при осевом сжатии. Многочисленность (несколько десятков) жесткостных параметров трехслойной оболочки с многослойными анизотропными композитными несущими слоями затрудняет анализ и получение обозримых расчетных зависимостей для определения критических нагрузок.

### Математическое моделирование

Для анализа устойчивости трехслойных композитных моделей применяются, в основном, следующие математические модели:

– модель ломаной линии, согласно которой многослойные анизотропные несущие слои рассматриваются как оболочки с неизменной нормалью, а поперечные сдвиги в заполнителе постоянны по толщине; этой модели соответствует дифференциальное уравнение в частных производных 12-го порядка;

– модель прямолинейного элемента, согласно которой сдвиги постоянны по толщине трехслойной оболочки; этой модели соответствует уравнение 10-го порядка;

– классическая модель неизменной нормали, согласно которой первоначальная нормаль к оболочке остается нормалью и к деформированной поверхности; этой модели соответствует дифференциальное уравнение 8-го порядка.

Во всех указанных моделях заполнитель считается недеформированным по нормали. Учет деформированности заполнителя может быть про-

изведен решением задачи об устойчивости несущего слоя на упругом основании [1].

Проводя анализ уравнений 12-го порядка, для модели ломаной линии удалось выделить три главные обобщенные жесткости трехслойной оболочки [1]:  $T_{10}^{nc} = 2 / R \sqrt{B_2 D_1^{nc}}$  – обобщенная жесткость несущих слоев;  $T_{10}^k = 2 / R \sqrt{B_2 D_1^k}$  – обобщенная жесткость трехслойной оболочки;  $K_1 = G_3 H / \delta$  – обобщенная жесткость трехслойного пакета на поперечный сдвиг.

Здесь  $\overline{B_2}$  – суммарная жесткость несущих слоев на сжатие,  $D_1^{nc}$ ,  $D_1^k$  – изгибная жесткость несущих слоев и трехслойной оболочки в осевом направлении;  $G_3$ ,  $\delta$  – модуль сдвига заполнителя и его толщина;  $H$  – расстояние между нейтральными поверхностями несущих слоев.

Этими обобщенными жесткостями определяются критические усилия, критерии применимости различных математических моделей и погрешности их применения, а также критерий эффективности трехслойной конструкции.

В зависимости от сдвиговой жесткости трехслойного пакета получены следующие формулы для расчета критических осевых усилий в трехслойной цилиндрической оболочке:

$$K_1 < \frac{1}{2} T_{10}^k, \\ T_1^{kp} = T_{10}^{nc} (1 - a_n) \sqrt{1 - \left( \frac{2K_1}{T_{10}^k} \right)^2} + K_1, \quad (1) \\ K_1 \geq \frac{1}{2} T_{10}^k, \quad T_1^{kp} = T_{10}^k \left( 1 - k_0 \frac{T_{10}^k}{4K_1} \right),$$

здесь  $a_n \leq 1$ ,  $k_0 \leq 1$  – известные коэффициенты анизотропии оболочки.

Соотношения между обобщенными жесткостями  $T_{10}^{\text{ж}}$ ,  $T_{10}^{\text{нц}}$ ,  $K_1$  определяют критерии применимости различных математических моделей. Так, если  $K_1 \gg T_{10}^{\text{нц}}$ , приходим к модели прямолинейного элемента. Погрешность применения этой модели  $\Delta_{\text{пр}} = T_{10}^{\text{нц}} / K_1$ . Условие  $K_1 \gg T_{10}^{\text{нц}}$  является также условием эффективности применения трехслойного пакета: критическая нагрузка для трехслойной оболочки должна существенно превосходить критическую нагрузку несущих слоев. Отсюда следует, что для реальных (эффективных) трехслойных конструкций вполне оправданно применение модели прямолинейного элемента.

Из второй формулы (1) следует критерий применимости к трехслойным оболочкам классической модели:  $T_{10}^{\text{ж}} / (4K_1) \ll 1$ . При этом погрешность применения классической модели  $\Delta_{\text{кл}} = T_{10}^{\text{ж}} / (4K_1)$ .

### Физическое моделирование

Как известно, при анализе устойчивости оболочек данные теории и эксперимента могут существенно различаться. Для назначения и обоснования поправочных эмпирических коэффициентов необходимо провести комплекс экспериментальных исследований на физических моделях. Обычно в качестве эмпирического коэффициента принимается так называемый коэффициент устойчивости – отношение экспериментального значения критического усилия  $T_{\text{э}}^{\text{кр}}$  к его теоретическому значению  $T_{\text{т}}^{\text{кр}}$ :

$$k_{\text{уст}} = \frac{T_{\text{э}}^{\text{кр}}}{T_{\text{т}}^{\text{кр}}}. \quad (2)$$

По причине большого многообразия жесткостных параметров трехслойных композитных оболочек проектирование и изготовление физических моделей требует решения специальной зада-

чи, позволяющей создать физические модели, адекватно отражающие законы сопротивления натуральных изделий.

Главные принципы проектирования и изготовления трехслойных композитных моделей определяются необходимостью соблюдать соответствие между обобщенными жесткостями физической модели и натурной конструкции. Эти принципы состоят в следующем:

- физическая модель и натура должны сопротивляться в соответствии с одинаковыми математическими моделями ( $K_1 < 1/2T_{10}^{\text{ж}}$  или  $K_1 \geq 1/2T_{10}^{\text{ж}}$ );

- физическая модель и соответствующая натурная конструкция должны терять устойчивость по одной и той же форме (общая – местная; несимметричная – осесимметричная);

- в области «слабых» заполнителей ( $K_1 < 1/2T_{10}^{\text{ж}}$ ) для физической модели и натуры должно быть близко отношение  $K_1 / T_{10}^{\text{нц}}$ ;

- в области «жестких» заполнителей ( $K_1 \geq 1/2T_{10}^{\text{ж}}$ ) для физической модели и натуры должно быть близко отношение  $K_1 / T_{10}^{\text{ж}}$ ;

- параметры анизотропии физической модели должны соответствовать параметрам анизотропии натуры;

- физическая модель должна изготавливаться в тех же технологических условиях, что и натура; проведение дефектоскопии обязательно.

Анализ экспериментальных данных показывает [1], что многие испытанные физические модели не отражают свойства реальных трехслойных композитных конструкций.

*Работа поддержана грантом РФФИ №10-08-00258а.*

### Список литературы

1. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: Физматлит, 2010. 248 с.

## MATHEMATICAL AND PHYSICAL MODELING IN PROBLEMS OF BUCKLING OF THREE-LAYER COMPOSITE SHELLS

*S.N. Sukhinin*

Issues of mathematical modeling and construction of physical models in buckling analysis of three-layer composite shells with multilayered load-bearing layers and a core are considered. Statistical analysis of results of experiments was done and recommendations for determining compensating empirical factors are given.

*Keywords:* three-layer (sandwich), composites, anisotropy, critical strain, compensation empirical factors, the statistical analysis.