УДК 539.3

МЕТОД СВЕДЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ГРАДИЕНТНЫХ ОБЛАСТЕЙ К РЕШЕНИЮ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.С. Трубчик[1]***, В.М. Александров***[2]

[1]Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону
[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

trubchik@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

При решении контактных задач теории упругости методами интегральных преобразований для неоднородных сред возникает проблема решения краевой двухточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Известен эффективный метод построения решения таких задач в декартовой системе координат, разработанный В.М. Александровым, С.М. Айзиковичем. В настоящем исследовании предлагается единый метод сведения контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородных полуограниченных сред к решению парных интегральных уравнений, модифицированный для систем координат, отличных от декартовых. Неоднородность среды моделируется принятием гипотезы о том, что упругие модули являются произвольными достаточно гладкими функциями координаты, вдоль которой действует нагрузка на штамп. Практическая реализация метода выявила его высокую эффективность как для малых, так и для больших значений характерного геометрического параметра среды и позволяет провести детальное исследование широкого класса задач для клиновидных, цилиндрических и сферических областей при изменении упругих свойств по угловым или радиальным координатам.

Ключевые слова: контактные задачи, теория упругости, функционально-градиентные материалы, неоднородные полубесконечные среды, парные интегральные уравнения.

Рассматривается упругая среда, занимающая связную область, ограниченную по какой-либо одной координате. Используем уравнения равновесия в напряжениях

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{1}$$

к которым добавляются соотношения закона Гука

$$\mathbf{T} = \Lambda\theta\,\mathbf{E} + 2\mathrm{M}\varepsilon. \tag{2}$$

Здесь Λ, M – коэффициенты Ламе, которые для рассматриваемого класса задач являются кусочно-гладкими функциями одной из координат, направление оси которой совпадает с нормалью к поверхности полубесконечной среды; $\mathbf{T}$ – тензор напряжений; $\mathbf{E}$ – единичный тензор; $\theta = I_1(\mathbf{T})/(3\Lambda + 2\mathrm{M})$; $I_1(\mathbf{T}) = \sigma$ – первый инвариант тензора напряжений; ε – линейный тензор деформации.

Подставив (2) в уравнение (1), получим уравнения равновесия упругой среды в перемещениях. Решение полученного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами ищем, применяя соответствующее интегральное преобразование, выбор которого обусловлен геометрией среды:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{U}(\alpha, x_2) B(\alpha, x_1, x_3)\, d\alpha. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{U} = (\alpha, x_2)$ – трансформанта интегрального преобразования (Фурье, Ханкеля или Меллина), $B = (\alpha, x_1, x_3)$ – ядро интегрального преобразования. Далее, не нарушая общности, считаем $x_2 = y$.

Относительно компонент U, V, W вектора $\mathbf{U}(\alpha, y)$ получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Систему уравнений удобно представить в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dy} = \mathbf{AY}. \tag{4}$$

Вид и ранг матрицы $\mathbf{A}$ обусловлен геометрией неоднородной среды.

Решение уравнения (4) представим в виде линейной комбинации векторов фундаментальной системы решений

$$\mathbf{Y}(\alpha, y) = \sum_{i=1}^{r} a_i(\alpha)\boldsymbol{\Psi}_i^F(\alpha, y), \tag{5}$$

где r – ранг вектор-функции $\mathbf{Y}(\alpha, y)$.

Фундаментальная система решений (5) может быть представлена в виде:

$$\mathbf{\Psi}_i^F(\alpha, y) = \mathbf{T}_i(\alpha, y)\mathbf{\Psi}_i(\alpha, y),$$

где $\mathbf{T}_i(\alpha, x)$ – диагональные матрицы, на диагонали которых расположены компоненты векторов $\mathbf{t}_i(\alpha, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Векторы $\mathbf{\Psi}_i(\alpha, y)$ являются собственными векторами матриц $\mathbf{A}$ в случае однородной среды; $\mathbf{t}_i(\alpha, y)$ – векторы модулирующих функций, определяемые характером неоднородности среды; $a_i(\alpha)$ – некоторые коэффициенты, которые определяются из краевых условий отдельно для каждого значения α. Этот прием позволяет в явном виде выделить в выражении (5) составляющие $\mathbf{\Psi}_i(\alpha, y)$, быстрый рост или осцилляция которых затрудняет процесс численной реализации решения. Компоненты векторов $\mathbf{\Psi}_i(\alpha, y)$ могут быть как экспоненциальными, так и тригонометрическими функциями (а также гипергеометрическими и цилиндрическими функциями) в зависимости от геометрии среды. Векторы модулирующих функций $\mathbf{t}_i(\alpha, y)$ определяются из решения задач Коши при фиксированных значениях α:

$$\frac{d\mathbf{t}_i}{dy} = \mathbf{B}_i \mathbf{t}_i \;\; (i = 1, \ldots, r), \;\; a \le y \le b.$$

Элементы матриц $\mathbf{B}_i$ имеют вид

$$B_{ij} = (\Psi_i^j)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{r} A_{ik} t_i^k \Psi_i^k - \frac{d\Psi_i^j}{dy}\right].$$

Начальные условия для $\mathbf{t}_i(\alpha, y)$ определяются видом решения векторного уравнения (4) для случая однородной среды.

Компонентами вектора решений $\mathbf{Y}_i(\alpha, y)$ являются

$$Y_k = \sum_{i=1}^{r} a_i t_i^k \Psi_i^k. \qquad (6)$$

Далее для построения решения контактной задачи численно построенная трансформанта ядра интегрального уравнения аппроксимируется аналитическим выражением специального вида [3], что позволяет получить приближенное аналитическое решение интегрального уравнения контактной задачи. Доказывается, что полученное приближенное решение является асимптотически точным как для малых, так и для больших значений безразмерного геометрического параметра задачи.

Развитый метод позволяет исследовать не только монотонное изменение упругих свойств в слое, клине и других полуограниченных областях, но и случай, когда первая производная закона неоднородности многократно изменяет знак по одной из координат среды.

Исследуется влияние на вид трансформанты ядра интегрального уравнения, к которому сводится задача количества изменений знака производной закона неоднородности. Анализируется влияние неоднородности среды на значения контактных напряжений и связь между усилием, действующим на штамп, и его перемещением. Получены максимально простые приближенные инженерные формулы для расчета механических характеристик задач, позволяющие уловить качественные отличия слоистого и функционально-градиентного материалов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №09-08-01141а, 10-08-00839а, 10-08-90025_бел-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК №02.740.11.0413, 02.740.11.5193, П1107).

Список литературы

1. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27, №1. С. 93–101.

2. Айзикович С.М., Александров В.М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1986. Т. 39, №3. С. 13–27.

3. Айзикович С.М. и др. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.

THE METHOD OF REDUCING THE CONTACT PROBLEMS FOR SEMI-INFINITE GRADIENT REGIONS TO THE SOLUTION OF DUAL INTEGRAL EQUATIONS

I.S. Trubchik, V.M. Alexandrov

The task of solving a two-point problem for a system of ordinary differential equations with variable coefficients arises when analyzing a contact problem of elasticity theory using the integral transformation method. The effective method for constructing such a solution in Cartesian coordinates is known from the papers by V.M. Alexandrov and S.M. Aizikovich. The present paper presents a unified method for reducing the contact problems of elasticity theory for continuously inhomogeneous half-bounded media to the solution of dual integral equations generalized for the non-Cartesian coordinates. The inhomogeneity of the medium is modeled by the assumption that elastic moduli are arbitrary smooth enough functions of the acting loading coordinate. Practical implementation of the method revealed its high efficiency both for small and large values of the characteristic geometric parameter of the medium and made it possible to investigate in detail a wide class of problems for wedge, cylindrical and spherical regions with the elastic moduli varying along angular or radial coordinates.

Keywords: contact problems, elasticity theory, functional graded medium, inhomogeneous half-infinite media, dual integral equations.