УДК 531.36;534.1

ПРАВИЛО, ПО КОТОРОМУ ПЕРИОД НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ ОДНОГО ПАРАМЕТРА

В.Н. Тхай

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

tkhaivn@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматриваются одночастотные колебания нелинейной автономной системы. Показано, что период колебаний зависит, как правило, только от одного параметра. Такой результат дан как для обратимой механической системы, так и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида.

Ключевые слова: колебания, период, параметр, автономная система, правило.

Введение

В линейной системе одночастотные колебания изохронны. В нелинейной системе период обычно меняется при переходе из одной точки к другой точке семейства колебаний, т.е. является функцией одной или нескольких переменных. Так, например, период колебаний (и вращений) математического маятника зависит от постоянной интеграла энергии. Семейства периодических орбит в ограниченной круговой задаче трех тел параметризированы постоянной интеграла Якоби. Период движения по эллиптическим орбитам в задаче двух тел определяется большей полуосью эллипса, а сами орбиты зависят от постоянных площадей и энергии. Более сложные примеры двухпараметрических семейств находим в задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае, когда центр тяжести находится в главной плоскости. Примеры показывают, что период движений зависит, как правило, только от одного параметра.

Правило для симметричных колебаний обратимой механической системы

Обратимая механическая система имеет вид:

$$\dot{u} = U(u,v), \quad \dot{v} = V(u,v),$$
$$U(u,-v) = -U(u,v), \quad V(u,-v) = -V(u,v); \quad (1)$$
$$u \in R^l, v \in R^n \, (l \geq n).$$

Для нее рассматривается неподвижное множество $M = \{u,v : v = 0\}$. Решение системы (1), пересекающее множество M, называется симметричным движением, оно может быть периодическим. Симметричное периодическое движение (СПД), по крайней мере, дважды пересекает множество M. Для системы, 2π-периодической по части или всем компонентам вектора v, СПД может быть колебанием или вращением, а на неподвижном множестве такие компоненты кратны π.

Приведенный в работе результат справедлив как для колебаний, так и для вращений. Ниже рассматривается только гладкая система (1), а зависимость периода от параметра устанавливается для СПД.

Определение. Первый интеграл $W(u, v) = h$ системы (1) называется симметричным, если $W(u,-v) = W(u,v)$, и асимметричным, если $W(u,-v) = -W(u,v)$.

Пусть система (1) допускает q асимметричных первых интегралов. На СПД постоянные этих интегралов равны нулю.

Симметричное решение обозначим через $v(u_1^0,...,u_l^0,t)$, где u^0 – начальная точка на неподвижном множестве M. Тогда необходимые и достаточные условия для существования СПД периода T имеют вид

$$v_s(u_1^0,...,u_l^0,T/2) = 0, \quad s = 1,...,n, \qquad (2)$$

причем из-за наличия в системе q асимметричных интегралов, q уравнений в (2) являются следствиями остальных уравнений.

Пусть система (2) допускает решение $u_1^0 = u_1^*,...,u_l^0 = u_l^*$, $T = 2\pi$. Тогда максимальное значение функционального определителя Ra системы (2) равно $n - q$. В таком случае доказывается следующее правило.

Теорема 1. *Период симметричных периодических движений – колебаний и вращений обратимой нелинейной механической системы, допускающей q ($q \geq 0$) асимметричных первых интегралов, зависит, как правило, только от одного существенного параметра.*

***Замечание* 1**. Сформулирован закон зависимости периода симметричных периодических движений только от одного параметра.

***Замечание* 2.** Под существенным параметром понимается или единственный параметр, или параметр, который является функцией других параметров задачи.

***Замечание* 3**. Число параметров, определяющих период, больше единицы только в вырожденном случае $Ra < n - q$.

Системы общего вида

В системе общего вида

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in R^m \tag{3}$$

необходимые и достаточные условия существования периодического движения задаются системой уравнений

$$x_s(x_1^{\,0},...,x_m^{\,0},T) - x_s^{\,0} = 0, \quad s = 1,...,m, \tag{4}$$

x_0 – начальная точка, а T – период. Если система (4) имеет решение $x^0 = x^*$, $T = 2\pi$, то уравнение (3) допускает 2π-периодическое решение. Функциональный определитель Ra^* системы (4) не превосходит числа $n - q$.

При этом возможны два случая. В первом из них уравнение в вариациях для периодического движения имеет только один нулевой характеристический показатель, а само движение изолировано. Во втором случае нулевые характеристические показатели образуют жорданову клетку, а на семействе период является функцией единственного параметра.

Теорема 2. *Период колебаний нелинейной автономной системы* (3) *на семействе зависит, как правило, только от одного существенного параметра.*

Замечание. Число параметров, определяющих период, больше единицы только в случае $Ra^* < m - 1$. Этот случай следует отнести к вырожденным.

Примеры

Приведем некоторые известные в механике семейства колебаний. Однопараметрическими являются (в скобках указан параметр): колебания и вращения математического маятника (постоянная энергии), семейства колебаний в задаче Колмогорова–Ситникова (постоянная энергии), колебания и вращения спутника на круговой орбите (постоянная энергии), семейства СПД в задаче трех тел (постоянная интеграла Якоби), маятниковые движения твердого тела вокруг неподвижной точки в общем случае, когда центр тяжести не находится ни в какой главной плоскости (постоянная интеграла энергии). Двухпараметрические семейства (параметрами служат постоянные площадей и энергии, в скобках указан существенный параметр): эллиптические орбиты в задаче двух тел (большая полуось эллипса), близкие к круговым резонансные орбиты в N-планетной задаче (постоянная энергии), маятниковые движения Млодзиевского, прецессии Гриоли и др. в задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае, когда центр тяжести находится в главной плоскости (постоянная энергии). Наконец, обратим внимание на маятниковые и псевдомаятниковые движения однородного эллипсоида на шероховатой плоскости, которые из-за симметрии поверхности тела принадлежат двухпараметрическому семейству с одним существенным параметром – постоянной энергии.

Отметим, что в приведенных примерах наблюдается «избранность» одного интеграла – интеграла энергии, который доставляет единственный существенный параметр семейства колебаний в нелинейной механической системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №09-01-00468), Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (П-15).

THE LAW THAT STATES THE OSCILLATIONS PERIOD TO DEPEND ON A SINGLE PARAMETER

V.N. Tkhai

One-frequency oscillations of autonomous systems are considered. The oscillations period turns out to depend, as a rule, on a single parameter. This result holds for both reversible mechanical systems and systems of standard form ordinary differential equations.

Keywords: oscillation, period, parameter, autonomous system, law.